
Übungen, Blatt 1

1) Kanonisches Ensemble harmonischer Quantenoszillatoren

- a) Bestimmen Sie für das System eines eindimensionalen, harmonischen Oszillators (*Hamilton-Operator* \mathcal{H} , Masse m , klassische Frequenz ω_0) im thermodynamischen Gleichgewicht mit einem Wärmebad der Temperatur $T = 1/\beta k$

α) die Zustandssumme $Z(\beta) = \text{Spur}(\exp(-\beta\mathcal{H}))$,

β) die Matrixdarstellung des Dichteoperators $\rho = \exp(-\beta\mathcal{H})/Z$ in der Teilchenzahlbasis $\{|n\rangle\}_0^\infty$,

γ) die Entropie $S(\beta)/k$ aus $Z(\beta)$.

- b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle x|\rho|x\rangle \equiv \rho(x, \beta)$ des Dichteoperators von Teil a) bezüglich des Ortsraum-Kets $|x\rangle$.

Welche Interpretation hat $\rho(x, \beta)$?

Hinweise zu b): Benutzen Sie die Oszillatorwellenfunktionen $\langle x|n\rangle$ und $\langle n|\rho|n'\rangle$ von a) β). Man findet eine Größe $G(q, z) := (1 - 2z) \exp(-q^2) F_2(q, z)$, mit der erzeugenden Funktion des *Quadrates* der *Hermite*-Polynome

$$F_2(q, z) := \sum_{n=0}^{\infty} (H_n(q))^2 \frac{z^n}{n!} .$$

- c) Leiten Sie aus $H'_n = 2qH_n - H_{n+1}$ (woher?) und $H'_{n+1} = 2(n+1)H_n$ (woher?) folgende partielle Differentialgleichung her:

$$\frac{\partial}{\partial q} G(q, z) = (-2q) \frac{1 - 2z}{1 + 2z} G(q, z) .$$

- d) Lösen Sie diese Gleichung, wobei eine zunächst beliebige Funktion von z aus der Orthonormalitätsrelation der *Hermite*-Polynome bestimmt werden kann.

2) (Anti-)Periodizität der thermischen Zweipunktfunktion

Die Zweipunktfunktion $G_\beta(\tau, \tau') = \hat{G}_\beta(\tau - \tau')$ erfüllt für $\tau \neq \tau'$

$$\hat{G}_\beta(\tau - \tau') = \Theta(\tau - \tau') \hat{G}_\beta^+(\tau - \tau') \pm \Theta(\tau' - \tau) \hat{G}_\beta^+(\beta\hbar + \tau - \tau') ,$$

wobei das obere, bzw. untere Vorzeichen zum *Bose*-, bzw. *Fermi*-Fall gehört.

- a) Testen Sie diese Periodizitätsbedingung im Fall eines harmonischen *Bose*-Oszillators mit $G_\beta^B(\tau, \tau') = \langle \mathbf{P}_\tau (\mathbf{a}(\tau) \mathbf{a}^+(\tau')) \rangle_\beta$, indem Sie $\langle \mathbf{a}(\tau) \mathbf{a}^+(\tau') \rangle_\beta$ berechnen und mit dem Resultat für $\langle \mathbf{a}^+(\tau') \mathbf{a}(\tau) \rangle_\beta$ in Verbindung bringen.

- b) Den gleichen Test im *Fermi*-Fall mit $G_\beta^F(\tau, \tau') = \langle \mathbf{P}_\tau (\mathbf{d}(\tau) \mathbf{d}^+(\tau')) \rangle_\beta$.