

Übungen, Blatt 12

**29) Thermovakuum im Bose-Fall**

Die folgende Gleichung soll gezeigt werden:

$$\sqrt{1 - \exp(-\omega_B \hbar \beta)} e^{\exp(-\omega_B \hbar \beta/2) \mathbf{a}^+ \tilde{\mathbf{a}}^+} |0, \tilde{0}\rangle = e^{\Theta_\beta (\mathbf{a}^+ \tilde{\mathbf{a}}^+ - \mathbf{a} \tilde{\mathbf{a}})} |0, \tilde{0}\rangle,$$

wobei  $\cosh \Theta_\beta$  und  $\sinh \Theta_\beta$  bestimmt werden sollen. In den Exponenten treten die freien Bose-Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $\mathbf{a}^+$ ,  $\mathbf{a}$ , bzw.  $\tilde{\mathbf{a}}^+$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}$  auf, zu denen das Vakuum  $|0\rangle$ , bzw.  $|\tilde{0}\rangle$  gehört, und  $|0, \tilde{0}\rangle \equiv |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$ . Die Operatoren mit Schlange vertauschen mit denen ohne Schlange.

- a) Sehen Sie eine einfache Art diese Gleichung zu zeigen?
- b) Berechnen Sie mit  $\mathbf{A}^+ := \mathbf{a}^+ \tilde{\mathbf{a}}^+$ ,  $\mathbf{A} := \mathbf{a} \tilde{\mathbf{a}}$ ,  $\mathbf{N} := \mathbf{a}^+ \mathbf{a}$ ,  $\tilde{\mathbf{N}} := \tilde{\mathbf{a}}^+ \tilde{\mathbf{a}}$  und  $\mathcal{N} := \mathbf{N} + \tilde{\mathbf{N}}$ :

$$[\mathbf{A}, \mathbf{A}^+], [\mathcal{N}, (\mathbf{A}^+)^n], [\mathcal{N}, (\mathbf{A})^n] \text{ und } [\mathbf{A}, (\mathbf{A}^+)^n].$$

- c) Welche Lie-Algebra bilden  $\mathbf{A}, \mathbf{A}^+, (\mathbf{1} + \mathcal{N})/2$ ?
- d) Berechnen Sie für  $n = 0, \dots, 5$  die Polynome  $R_n(x)$  die in

$$(\mathbf{A}^+ - \mathbf{A})^n |0, \tilde{0}\rangle = R_n(\mathbf{A}^+) |0, \tilde{0}\rangle$$

auftreten.

Erkennen Sie ein Muster? Formulieren Sie Ihre Vermutung, und versuchen Sie sie zu beweisen.

- d) Wie ergibt sich dann die Behauptung?

**30) Thermovakuum, Vernichter und Erzeuger im Fermi-Fall**

- a) Zeigen Sie, dass mit  $\mathbf{d}(\beta) = \exp(-i \mathbf{G}_\beta^F) \mathbf{d} \exp(+i \mathbf{G}_\beta^F)$  (analog für  $\mathbf{d}^+$ ) und mit  $-i \mathbf{G}_\beta^F := \Theta_\beta^F (\mathbf{D}^+ - \mathbf{D})$ , wobei  $\mathbf{D}^+ := \mathbf{d}^+ \tilde{\mathbf{d}}^+$  und  $\mathbf{D} := (\mathbf{D}^+)^+ = \tilde{\mathbf{d}} \mathbf{d}$  ist, gilt:

$$\mathbf{d}(\beta) |\beta; 0\rangle = 0 = \tilde{\mathbf{d}}(\beta) |\beta; 0\rangle.$$

$\Theta_\beta^F$  ist aus der Vorlesung bekannt.

- b) Welche Zustände spannen den Fockraum mit dem thermalen Vakuum  $|\beta; 0\rangle$  auf?
- c) Zeigen Sie, dass diese vier Zustände Eigenzustände von  $\hat{\mathbf{H}}_\beta^F := \mathbf{H}_\beta^F \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes \tilde{\mathbf{H}}_\beta^F$  sind. Dabei sind in den Hamiltonoperatoren mit Index  $\beta$  die thermalen Erzeuger und Vernichter zu verwenden. Welches sind die Eigenwerte?