
Übungen, Blatt 1

Abgabetermin: 03.05.'04, 11.15 Uhr, Eingangsbereich Physikhochhaus
Name: Tutorium (B, G, H, M, N oder O):

Aufgabe 1: Indirektes Schließen und Negation **3 Pkte.**

Geben Sie für die folgenden Aussagen vom Typ $A \Rightarrow B$ die gleichbedeutende (äquivalente) Formulierung $\neg B \Rightarrow \neg A$ an, wobei $\neg C$ die Negation (das Gegenteil) der Aussage C bezeichnet. Schreiben Sie jeweils eine möglichst einfache Formulierung auf.

- a) Wenn der Mensch weder körperliche noch seelische Schmerzen hat, ist er glücklich.
- b) Wenn Paul keine Weltreise macht, dann will er anfangen entweder Physik oder Mathematik zu studieren.
- c) Wenn man keine Kartoffeln oder keine Spätzle hat, dann kann man keinen Gaisburger Marsch kochen.

Aufgabe 2: Logik **3 Pkte.**

Zeigen Sie für beliebige Aussagen A , B und C mittels Wahrheitstabellen das folgende Distributivgesetz.

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) .$$

Aufgabe 3: Mengen 1 **1 + 2 = 3 Pkte.**

a) Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen M_1 , M_2 und M_3 gilt:

$$M_1 \subset M_2 \wedge M_2 \subset M_3 \Rightarrow M_1 \subset M_3. \quad (\text{Transitivität von } \subset)$$

b) Geben Sie ein Beispiel an, welches zeigt, dass die Relation des Elementseins (i. Allg.) nicht transitiv ist, d.h. dass die folgende Aussage falsch ist:

$$m \in M \wedge M \in N \Rightarrow m \in N .$$

Aufgabe 4: Mengen 2 **4 Pkte.**

Beweisen Sie für beliebige Mengen A , B und C das folgende Distributivgesetz:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) .$$

Aufgabe 5: Abbildung und Mengen **2 + 3·1 = 5 Pkte.**

X und Y seien Mengen, und $A : X \rightarrow Y$ sei eine Abbildung. Das Bild einer Untermenge V von X bezüglich A ist

$$A(V) := \{y \in Y \mid \exists v \in V : y = Av\} = \{Av \mid v \in V\} . \text{ Man verwendet } A(\emptyset) = \emptyset .$$

Zeigen Sie für $V \subset X$ und $W \subset X$ die Behauptungen:

- a) $A(V \cup W) = A(V) \cup A(W)$,
- b) $A(V \cap W) \subset A(V) \cap A(W)$.

Aufgabe 5: Fortsetzung

- c) Fall b) wird i. Allg. falsch, wenn \subset durch $=$ ersetzt wird. Geben Sie ein Beispiel dafür an.
- d) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass im Fall b) tatsächlich $=$ vorkommen kann.

Aufgabe 6: Hintereinanderausführung von Abbildungen**5 Pkte.**

X, Y und Z seien Mengen, sowie $A : X \rightarrow Y$ und $B : Y \rightarrow Z$ zwei Abbildungen. Die Hintereinanderausführung „erst A , dann B “ wird mit $C = B \circ A$ bezeichnet, und es ist $Cx := (B \circ A)x = B(Ax)$.

a) Zeigen Sie:

- 1) Wenn A und B injektiv sind, dann ist auch C injektiv.
- 2) Wenn A und B bijektiv sind, dann ist auch C bijektiv.
- 3) Wenn C surjektiv ist, dann ist auch B surjektiv.

b) Zeigen Sie durch indirekten Beweis (d.h. statt $A \Rightarrow B$ zeigt man $\neg B \Rightarrow \neg A$, siehe Aufg.1): Wenn C injektiv ist, dann ist auch A injektiv.

c) Zeigen Sie durch Widerspruchsbeweis: Ist B injektiv und C nicht injektiv, dann ist A nicht injektiv.

Aufgabe 7: Assoziativgesetz für Abbildungen**2 Pkte.**

Gegeben seien die nichtleeren Mengen X_i , $i = 1, 2, 3, 4$, und die drei Abbildungen $A_1 : X_1 \rightarrow X_2$, $A_2 : X_2 \rightarrow X_3$ und $A_3 : X_3 \rightarrow X_4$.

Beweisen Sie mit der in Aufgabe 6 gegebenen Definition der Bezeichnung der Hintereinanderausführung $B \circ A$:

$$A_3 \circ (A_2 \circ A_1) = (A_3 \circ A_2) \circ A_1 .$$

Also kann man die Klammersetzung vermeiden und schreiben $A_3 \circ A_2 \circ A_1$.

max $\Sigma_1 = 25$ Pkte.

Die Übungsblätter sind auch unter der folgenden Netzadresse zu finden.

<http://www.-itp.physik.uni-karlsruhe.de/~wl/>

In der ersten Saalübung am Montag, den 26. April um 14.00 Uhr - 15.30 Uhr, werden behandelt:

- Wahrheitstafel zum Beweis eines Logikgesetzes.
- Beispiel eines Widerspruchsbeweises: Die Menge der Primzahlen ist nicht endlich.
- Abbildungen.