Universität Karlsruhe **Sommersemester 2004**

Mathematische Grundlagen der Physik

V: Dr. M. Eschrig/ Dr. R. Harlander

Ü: Dr. habil. W. Lang mit Dipl.-Phys. S. Legel

Übungen, Blatt 14

Abgabe: bei W.Lang PhHh 12/6

Aufgabe 1: Extrema, Methode der kleinsten Quadrate

a) Bestimmen Sie zu $n \in \mathbb{N}$ gegebenen reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ diejenige reelle Zahl a, für die die Summe der Quadrate der Abweichungen, d.h.

$$d_2(a) \ := \ \sum_{k=1}^{n} (a \ - \ a_k)^2 \ ,$$

minimal wird.

b) Ordnen Sie die n Zahlen: $a_1 \ \leq \ a_2 \ \leq \ ... \ \leq \ a_n$ (o.B.d.A.), und nehmen Sie an, dass nicht alle n Zahlen gleich sind (trivialer Fall).

i) Nehmen Sie zusätzlich an, dass die n Zahlen paarweise verschieden sind. Für welche reelle Zahl, bzw. Zahlen, a ist die Summe der Beträge der Abweichungen, d.h.

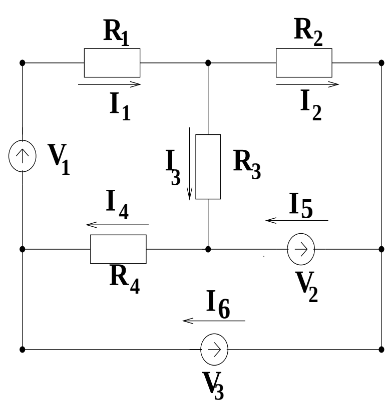
$$d_1(a) \ := \ \sum_{k=1}^{n} |a \ - \ a_k| \ ,$$

extremal? (Fallunterscheidung, je nach Relation zwischen a und den a_k.) Handelt es sich bei den Extrema um Minima?

ii) Was ergibt sich für die Extremalbedingung im Fall, dass unter den n Zahlen auch gleiche vorkommen (aber nicht alle gleich sind)?

Aufgabe 2: Inhomogenes lineares Gleichungssystem

Bestimmen Sie in der abgebildeten elektrischen Schaltung die Ströme $\{I_k\}_{k=1}^{6}$ als Funktion der Widerstände $\{R_k\}_{k=1}^{4}$ und der Batteriespannungen $\{V_k\}_{k=1}^{3}$ mittels der *Kirchhoff*schen Gesetze.
Verschwindender Spannungsabfall in jeder Schleife,
z.B.: $R_1 \, I_1 \ + \ R_3 \, I_3 \ + \ R_4 \, I_4 \ - \ V_1 \ = \ 0$.
Stromerhaltung an jedem Knoten,
z.B.: $I_1 \ - \ I_2 \ - \ I_3 \ = \ 0$.
Hinweis: Nur sechs Gleichungen sind linear unabhängig.



Aufgabe 3: Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörenden Eigenvektoren der Matrizen

$$\mathbf{A} \ = \ \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathbf{B} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Gibt es eine Matrix $\mathbf{M}$, so dass $\mathbf{M}\mathbf{B}\,\mathbf{M}^{-1} \ = \ \mathbf{D}$, mit einer Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ (mit den Eigenwerten auf der Diagonalen), gilt? Kann man auf diese Art (mit anderem $\mathbf{M}$) auch die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalisieren?

Aufgabe 4: Adjunkten einer quadratischen Matrix und Inverses

Für eine beliebige quadratische $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ ist eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}^{\#}$ mit der folgenden Eigenschaft gesucht.

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{\#} \;=\; Det(\mathbf{A})\,\mathbf{1_n} \;=\; \mathbf{A}^{\#}\mathbf{A}$$

Dabei steht $\mathbf{1_n}$ für die $n \times n$ Einheitsmatrix mit Einträgen 1 in der Hauptdiagonalen und 0 sonst.

a) Schreiben Sie diese Forderungen für die Matrixelemente mit $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ und $\mathbf{A}^{\#} = (a^{\#}_{i,j})$ auf, aber lassen Sie $Det(\mathbf{A})$ stehen.

b) Betrachten Sie die Diagonalelemente der ersten dieser Matrixgleichungen. Zeigen Sie mittels des *Laplace*-Entwicklungssatzes für Determinanten, dass gilt:

$$a^{\#}_{i,k} \;=\; (-1)^{i+k}\, Det(\mathbf{A}_{k,i})\;,\;\; i,k \;=\; 1,2,...,n,$$

wobei die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix $\mathbf{A}_{k,i}$ aus der Matrix $\mathbf{A}$ durch Streichen der $k-$ten Zeile und der $i-$ten Spalte entsteht.

Hinweis: Laplace-Entwicklungssatz mit beliebigem Zeilenindex i und beliebigem Spaltenindex k:

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j}\, Det(\mathbf{A}_{i,j}) \;=\; Det(\mathbf{A}) \;=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k}\, a_{j,k}\, Det(\mathbf{A}_{j,k})\,.$$

c) Prüfen Sie, ob die gefundene Lösung $\mathbf{A}^{\#}$ auch die Nichtdiagonalelemente der ersten Matrixgleichung der Einleitung erfüllt.

Hinweis: Lesen Sie die Gleichung als Entwicklungssatz für die Determinante einer Matrix, die zwei identische Zeilen hat.

d) Zeigen Sie durch Analogieschluss, dass auch die zweite Matrixgleichung der Einleitung mit der gefundenen Matrix $\mathbf{A}^{\#} = (a^{\#}_{i,j})$ erfüllt ist.

Vorausgesetzt dass $Det(\mathbf{A}) \neq 0$ gilt, erhält man also für die inverse Matrix

$$\mathbf{A^{-1}} \;=\; \frac{1}{Det(\mathbf{A})}\,\mathbf{A}^{\#}\;.$$

Bemerkung: $a^{\#}_{i,k}$ heißt Adjunkte zum Matrixelement $a_{k,i}$ (Indexreihenfolge!). $\mathbf{A}^{\#}$ ist die Matrix der Adjunkten zu $\mathbf{A}$.

e) Berechnen Sie die Adjunkte $\mathbf{A}^{\#}$ und daraus die inverse Matrix $\mathbf{A^{-1}}$ zur Matrix

$$\mathbf{A} \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Was folgt allgemein für $Det(\mathbf{A}^{\#})$ aus der Definition von $\mathbf{A}^{\#}$ in der Einleitung?

Nachlausur: Dienstag, den 19. Oktober 2004, 14.00 - 15.30, Ort wird später bekannt gegeben
Stoff: Die gesamte Vorlesung, also alle Bätter 1-14.

Hilfsmittel: Maximal 2 handbeschriebene Din-A4 Blätter (keine Kopien). Sonst keine Hilfsmittel. Schreibpapier wird zur Verfügung gestellt.
Bitte Schreibzeug (nichtradierbar) und Studienausweis mitbringen.

Scheinkriterium: 162 oder mehr Blattpunkte (inklusive Vor- und Proberechnen) aus den Blättern 1 - 11 (inklusive) und die Hälfte oder mehr der Nach-