Universität Karlsruhe — **Sommersemester 2004**

Mathematische Grundlagen der Physik

V: Dr. M. Eschrig/ Dr. R. Harlander
Ü: Dr. habil. W. Lang mit Dipl.-Phys. S. Legel

Klausur, 12. Juli 2004, 14.00 - 15.30 Uhr

Name: **Tutorium (B, G, H, M, N oder O):**

1	**2**	**3**	
			Σ =

Allgemeine Hinweise:

Die Gesamtpunktzahl der aus **d r e i Aufgaben** bestehenden Klausur beträgt **32 Punkte**. Ein Schein wird vergeben, wenn in der Klausur **16** oder mehr Punkte erreicht werden und in den Übungsblättern Nr. 1 - 11 (zusammen mit Bonuspunkten für das Vor- und Proberechnen) **162** oder mehr Punkte erreicht wurden.

Die Punktzahlen für die Teilaufgaben sind am Ende jeder Aufgabe angegeben.

Fortsetzung mit **Aufgabe 1** auf Seite - 2 -

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen **12 Pkte.**

a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen z in der Form $z \;=\; x + i\,y$, mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{1})\;\; (1 - i)^3 \;, \qquad \mathbf{2})\;\; \frac{2 + i}{1 - i} \;, \qquad \mathbf{3})\;\; \left(\overline{(1 + i)}/(1 + i\,)\right)^4 \;.$$

b) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Polarkoordinatendarstellung $r\ exp(i\,\varphi)$ auf, wobei $-\pi \;<\; \varphi \;\leq\; +\pi$ gelten soll.

$$\mathbf{1)}\;\; z \;=\; -2 \;, \qquad \mathbf{2)}\;\; z \;=\; -1 + i\,\sqrt{3} \;.$$

Hinweis: zu **2)**: $arctan(1/\sqrt{3}) \;=\; \pi/6$ oder $arctan(\sqrt{3}) \;=\; \pi/3$.

c) Bestimmen Sie jeweils die folgenden Teilmengen $M \subset \mathbb{C}$ und skizzieren Sie sie in der Ebene mit kartesischen Koordinaten $y \;:=\; Im(z)$ und $x \;:=\; Re(z)$.

$$\mathbf{1)}\;\; M \;:=\; \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\,z - i| \;<\; \tfrac{1}{2} \right\} ,$$

$$\mathbf{2)}\;\; M \;:=\; \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; Im(1/z) \;=\; 1 \right\} .$$

d) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ in Polarkoordinatendarstellung (mit dem Argument $\varphi \in (-\pi, +\pi]$ wie in Teil **b)**), die die Gleichung

$$z^3 \;=\; -1$$

erfüllen.

$3 \cdot 1 + (1 + 2) + 2 \cdot 2 + 2 = 12$ Pkte.

Fortsetzung mit **Aufgaben 2 und 3** auf Seite - 3 -

Aufgabe 2: Vektorrechnung **14 Pkt.**

Im $\mathbb{R}^3$ seien in kartesischen Koordinaten eine Ebene E_1 und zwei Punkte P und Q wie folgt gegeben.

$$E_1 : \quad x + y - z + 3 = 0 , \quad P(1,1,1) , \; Q(1,2,-1) .$$

a) Liegt P in E_1? Liegt Q in E_1? Geben Sie einen Punkt A an, der in der Ebene E_1 liegt.

b) Wie sieht allgemein die *Hesse*-Normalform einer Ebene aus?
Bestimmen Sie einen Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_1$ zur Ebene E_1. Welche Freiheit gibt es bei dieser Bestimmung?

c) Welchen Abstand hat der 0−Punkt (Ursprung) von der Ebene E_1?

d) Gesucht ist eine Parameterdarstellung derjenigen Ebene E, in der beide Punkte P und Q liegen und die senkrecht auf der Ebene E_1 steht. Bestimmen Sie dazu zwei Richtungsvektoren für E.
Zeigen Sie, dass ihre gefundenen Richtungsvektoren linear unabhängig sind.
Schreiben Sie dann die Parameterdarstellung für einen beliebigen Punkt X der Ebene auf.

e) Eliminieren Sie die Parameter in der in Teil **d)** gefundenen Darstellung der Ebene E. Schreiben Sie die implizite Gleichung dieser Ebene auf. Machen Sie eine Probe mit P und Q.

f) Berechnen Sie einen Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ zur Ebene E aus den im Teil **d)** gefundenen Richtungsvektoren. Testen Sie Ihr Ergebnis mit der im Teil **e)** gefundenen impliziten Gleichung von E.

1 + 3 + 2 + 4 + 2 + 2 = 14 Pkte.

Aufgabe 3: Differentiation **6 Pkte.**

a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die *Leibniz*-Regel:

$$(f\,g)^{(n)} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)} \quad , \; n \in \mathbb{N}_0 ,$$

für zwei auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ jeweils $n-$fach differenzierbare Funktionen f und g.

Hinweise: $f^{(p)}$ bezeichnet die $p-$fache Ableitung von f. $f^{(0)} := f$, $f^{(1)} = f'$, *etc.*
Analoges gilt für $g^{(p)}$ unf $(f\,g)^{(p)}$.
$\binom{n}{k} := n!/((n-k)!\,k!)$, $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $0! := 1$.
Die Rekursionsformel des *Pascal*-Dreiecks ist: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

b) Berechnen Sie $(x^2\, e^x)^{(100)}$.

4 + 2 = 6 Pkte.