
Klausur, Lösungen

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen **12 Pkte.**

a) 1) $(1 - i)^3 = 1 - 3i - 3 + i = -2 - 2i = -2(1 + i)$ (binomische Formel).

2) $(2 + i)/(1 - i) = 1/2\,(1 + i)(2 + i) = 1/2\,(2 - 1 + i(1 + 2)) = (1 + 3i)/2$.
Typ: $1/z = \bar{z}/|z|^2$.

3) $(\overline{(1 + i)}/(1 + i))^4 = (1/2\,(1 - i)(1 - i))^4 = (1/2\,(1 - i)^2)^4 =$
$(1/2\,(1 - 1 - 2i))^4 = (-i)^4 = i^4 = +1$.

b) 1) $r = |-2| = 2$; $arg(-2) = \pi$; $z = 2\,exp(i\pi)$.
2) $|-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$, $arg(z) = ?$ Da z im II. Quadranten, z.B. mit $tan\,\alpha = 1/\sqrt{3}$ und $\varphi \equiv arg(z) = \pi/2 + \alpha$, d.h. $\pi/2 + \pi/6 = 2\pi/3$.
Andere Version mit $tan\,\gamma = \sqrt{3}$: $\varphi = arg(z) = \pi - \gamma = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$.
$z = 2\,exp(2\pi i/3)$. φ im gewünschten Bereich.

c) 1) Inneres des Kreises mit Mittelpunkt $z = +i$ und Radius 1/2.
2) $Im(1/z) = Im(\bar{z}/|z|^2) = Im(\bar{z})/|z|^2 = -y/(x^2 + y^2)$.
$Im(1/z) = 1$: Da $|z| \neq 0$ (da $z = 0$ keine Lösung): $x^2 + y^2 + y = 0$. Quadratisch Ergänzen: $x^2 + (y + 1/2)^2 = (1/2)^2$.
Linie eines Kreises mit Mittelpunkt bei $y = -1/2$ und Radius $1/2$, aber Nullpunkt auszunehmen.

d) Betrag: $r^3 = 1$, also $r = 1$. $exp(i\,3\varphi) = -1$, d.h. $3\varphi \equiv \pi(mod\,2\pi)$,
d.h. $\varphi = \pi/3, \pi/3 \pm 2\pi/3, ...$ Drei Lösungen, mit $\varphi \in (-\pi, +\pi]$:
$z_1 = exp(+i\pi/3), exp(i\pi), exp(-i\pi/3)$. D.h. 3. Einheitswurzeln $\zeta_j^{(3)}, j = 1, 2, 3$,
gedreht um $\pi/3$: $z_j = exp(+i\pi/3)\,\zeta_j^{(3)}$, $j = 1, 2, 3$.

Aufgabe 2: Vektorrechnung **14 Pkte.**

$E_1 :\ x + y - z + 3 = 0\ \ P(1, 1, 1)\ ,\ Q(1, 2, -1))$

a) $P \notin E_1$, $Q \notin E_1$ (Punktprobe). Z.B. $A(0, 0, 3) \in E_1$.

b) Ebene mit Punkt A, Ortsvektor $\vec{a}$, Normalen(einheits)vektor $\vec{n}$. Beliebiger Punkt P auf der Ebene, Ortsvektor $\vec{x}$. *Hesse*-Normalform: $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$.
$\vec{n}_1$ zu E_1 aus impliziter Gleichung, bis auf Normierung zunächst: $\vec{n} \propto (1, 1, -1)^\top$.
Normiert: $\vec{n} = \pm(1, 1, -1)^\top/\sqrt{3}$. Freiheit: Vorzeichen.

c) $d_1 = |\vec{a} \cdot \vec{n}_1|$ gibt Abstand vom Nullpunkt zu E_1, mit $\vec{a}$ Ortsvektor zu A. $d_1 = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}\,LE$. LE für Längeneinheiten.

d) Ebene E hat einen Richtungsvektor, z.B. $\vec{q} - \vec{p}$, da P und Q in dieser Ebene liegen sollen. Ein zweiter Richtungsvektor ist $vecn_1$, da $E \perp E_1$ gelten soll und $\vec{n}_1 \perp E_1$ nach Konstruktion. Also z.B. (Normierung unwichtig): $\vec{r}_1 := (0, 1, -2)^\top$ und $\vec{r}_2 := (1, 1, -1)^\top$.
Parameterdarstellung von E z.B.: $\vec{x} = \vec{p} + \alpha\,\vec{r}_1 + \beta\,\vec{r}_2$.

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 2 auf Seite - 2 -

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 2:

e) $x = 1+\beta$, d.h. $\beta = x-1$; $y = 1+\alpha+\beta$, d.h. $\alpha = y-x$;
$z = 1-2(y-x)-(x-1) = 2-2y+x$.
Also implizite Gleichung von E: $x-2y-z+2 = 0$. Tests mit P und Q, Punktprobe.

f) $\vec{n} \propto (0,1,-2)^\top \times (1,1,-1)^\top = (1,-2,-1)^\top$. Normiert: $\vec{n} = \pm(1,-2,-1)/\sqrt{6}$.
Unnormiert aus Teil **e)** implizite Gleichung: $\vec{n} \propto (1,-2,-1)^\top$. O.K.
(Nicht gefragt: Abstand des Nullpunktes von der Ebene E: $d = |\vec{p}\cdot\vec{n}| = 2/\sqrt{6}\,LE$.)

Aufgabe 3: Differentiation **6 Pkte.**

a) *Induktionsanfang*: $n = 0$: $(f\,g)^{(0)} = f\,g = \binom{0}{0} f^{(0)}\,g^{(0)} = 1\,f\,g = f\,g$.
Induktionsschritt: $\forall n \in \mathbb{N}$: Aus Annahme $A(n)$ richtig $\Longrightarrow$ $A(n+1)$ richtig:
$A(n+1)$: $(f\,g)^{(n+1)} = \frac{d}{dx}(f\,g)^{(n)} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}\,g^{(n-k)}$ mit Produktregel und Linearität von Operation $\frac{d}{dx}$: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)}\,g^{(n-k)} + f^{(k)}\,g^{(n+1-k)}\right) =$
$\sum_{\hat{k}=1}^{n+1}\binom{n}{\hat{k}-1} f^{(\hat{k})}\,g^{(n-(\hat{k}-1))}$ (Summationsindex umbenannt) $+ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}\,g^{(n+1-k)}$.
Gemeinsame Summe beider Terme aufschreiben und Reste (1. Summe $\hat{k} = n+1$ Term, 2. Summe $k=0$ Term) extra schreiben: (Index $\hat{k}$ wieder als k nehmen)

$$= \sum_{k=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)}\,g^{(n+1-k)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)}\,g^{(0)} + \binom{n}{0} f^{(0)}\,g^{(n+1)} .$$

Pascal-Rekursion: $= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} f^{(k)}\,g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} + g^{(n+1)}$.
Die letzten zwei Terme als $k = n+1$ und $k = 0$ Summanden lesen:
$\sum_{k=\mathbf{0}}^{\mathbf{n+1}}\binom{n+1}{k} f^{(k)}\,g^{(n+1-k)} = (f\,g)^{(n+1)}$.
Induktionsschluß : Formel $A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) $n = 100, f = x^2, g = e^x$:
$(x\,e^x)^{100} = \binom{100}{0}x^2\,e^x + \binom{100}{1}2\,x\,e^x + \binom{100}{2}2\,e^x = (x^2 + 200\,x + 9900)\,e^x$.