
Nachklausur, 20. Oktober 2004, 14.00 - 15.30 Uhr

Name:

Matrikelnummer:

1	2	3	
			$\Sigma =$

Allgemeine Hinweise:

Die Gesamtpunktzahl der aus **d r e i Aufgaben** bestehenden Nachklausur beträgt **32 Punkte**. Ein Schein wird vergeben, wenn in der Nachklausur **16** oder mehr Punkte erreicht werden und in den Übungsblättern Nr. 1 - 11 (zusammen mit Bonuspunkten für das Vor- und Proberechnen) **162** oder mehr Punkte erreicht wurden.

Die Punktzahlen für die Teilaufgaben sind am Ende jeder Aufgabe angegeben.

Fortsetzung mit **Aufgabe 1** auf Seite - 2 -

Aufgabe 1: Funktionenfolge, Monotonie, Schranken**12 Pkte.**

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist die Funktion f_n mit Definitionsbereich $D(f_n) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \infty\}$ wie folgt definiert:

$$f_n(x) := \sum_{k=2}^n \frac{1}{(x^2 + k - 1)(x^2 + k)}.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in D(f_n)$, $n \geq 2$, gilt:

$$f_n(x) = \frac{n - 1}{(x^2 + 1)(x^2 + n)}.$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

- b) Geben Sie die Grenzfunktion $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ an, falls sie existiert.
- c) Zeigen Sie, dass für festes $x \in [0, \infty)$ die Folge $\{f_n(x)\}$ streng monoton wächst.
- d) Betrachten Sie nun ein beliebiges, aber fest gewähltes $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Funktion f_n in x streng monoton fallend ist.
- e) Prüfen Sie für ein fest gewähltes $n \geq 2$, ob der Bildbereich ('range') $R_n \equiv R(f_n)$ beschränkt ist. Bestimmen Sie diese Menge $R_n \subset \mathbb{R}$. Geben Sie für das fest gewählte n die folgende Größen an, falls sie existieren: $\sup R_n$, $\inf R_n$, $\max R_n$ und $\min R_n$.
- f) Betrachten Sie nun variables n , und bestimmen Sie die folgenden Zahlen, falls sie existieren.

$$\min_{n \geq 2} \{\inf R_n\}, \quad \min_{n \geq 2} \{\max R_n\}, \quad \sup_{n \geq 2} \{\max R_n\}, \quad \max_{n \geq 2} \{\max R_n\}.$$

3 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 = 12 Pkte.

Fortsetzung mit **Aufgaben 2 und 3** auf Seite - 3 -

Aufgabe 2: Reihen, Cauchy-Produkt**11 Pkt.**

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die *Taylor-Reihe* $T(\alpha; x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, mit $\alpha \in \mathbb{R}$, zu der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = (1+x)^\alpha$ den Konvergenzradius $R = 1$ hat, und die Restgliederfolge $\{R_n(\alpha; x)\}$ für jedes $|x| < 1$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Nullfolge ist. Der verallgemeinerte Binomialkoeffizient ist definiert als

$$\binom{\alpha}{k} := (\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1)))/k!, \text{ falls } k \in \mathbb{N}, \text{ und } \binom{\alpha}{0} := 1.$$

- a) Schreiben Sie für feste $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen $T(\alpha; x)$ und $T(\beta; x)$ in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha, \beta) x^n$, und geben Sie $a_n(\alpha, \beta)$ an.
 b) Erläutern Sie, unter welcher Voraussetzung für das in Teil a) gefundene *Cauchy-Produkt* gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha, \beta) x^n = (1+x)^\alpha (1+x)^\beta.$$

- c) Welche Schlüsse führen dann mit dem in Teil a) bestimmten $a_n(\alpha, \beta)$ zur Identität

$$a_n(\alpha, \beta) = \binom{\alpha + \beta}{n}?$$

- d) Prüfen Sie die in Teil c) gefundene Identität in α und β am Beispiel $n=2$.

4 + 2 + 3 + 2 = 11 Pkte.**Aufgabe 3: Integration****9 Pkt.**

Es soll der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x, y)$ mit

$$s_n(x, y) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{x n + y k}, \text{ für gegebenes } x > 0 \text{ und } y > 0$$

bestimmt werden, indem die Partialsumme s_n (festes x und y) als *Riemann-Zwischensumme* $Z_{E_n} := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta_k$ interpretiert wird, so dass der Grenzwert dann als Riemann-Integral erhalten wird. Dazu soll eine geeignete Funktion f mit Argument t aus dem Intervall $I := [0, 1]$ und eine bestimmte Zerlegung mit $\Delta_k := |I_k| = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, mit $t_0 = 0$ und $t_n = 1$ und mit Zwischenstellen $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ gesucht werden.

Bearbeiten Sie dazu die folgenden Teilaufgaben.

- a) Verwenden Sie eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$ mit $\Delta_k \equiv \Delta$, für alle $k = 1, 2, \dots, n$ (Skizze). Welchen Wert hat Δ ?
 b) Wie wählt man zur Lösung der Aufgabe die Zwischenstellen ξ_k und die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, y; t)$ bei gegebenem $x > 0$ und $y > 0$?
 c) Berechnen Sie schließlich das *Riemann-Integral*, um den gesuchten Grenzwert zu erhalten.

3 + 3 + 3 = 9 Pkte.