

Nachklausur, Lösungen

Aufgabe 1: Funktionenfolge, Monotonie, Schranken

12 Pkte.

a) Summand $a_k(x)$ als Differenz schreiben: $a_k(x) = b_{k-1}(x) - b_k(x)$ mit $b_k(x) = 1/(x^2 + k)$. (Ansatz: $1/((x^2 + k - 1)(x^2 + k)) = A/(x^2 + k - 1) + B/(x^2 + k)$ zeigt, dass $A = -B = +1$.) Dann Teleskopsumme: $f_n(x) = b_1(x) - b_n(x) = 1/(x^2 + 1) - 1/(x^2 + n) = (n - 1)/((x^2 + 1)(x^2 + n))$.

b) $f_n(x) = (1/(x^2 + 1))((1 - 1/n)/(1 + x^2/n))$, $n \geq 2$, also nach Rechnen mit konvergenten Folgen: $x \in [0, \infty)$ beliebig, Vorfaktor Konstante, Zähler konvergiert gegen 1 und Nenner gegen $1 \neq 0$, also existiert die Grenzfunktion für alle $x \in [0, \infty)$ und ist $f(x) = 1/(x^2 + 1)$.

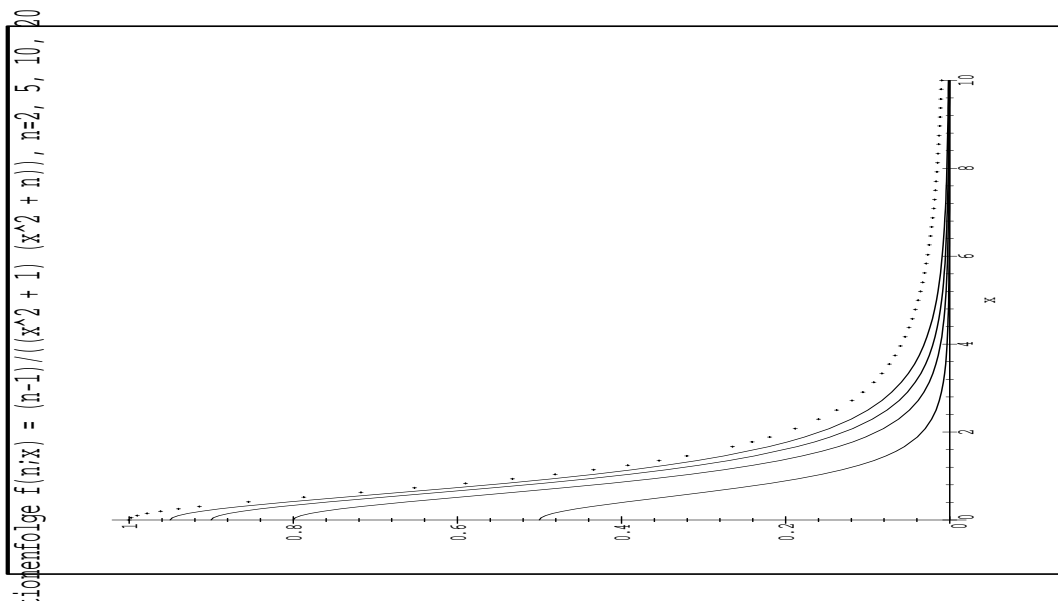
c) x fest: $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (n/(x^2 + n + 1) - (n - 1)/(x^2 + n))/(x^2 + 1) = (1/(x^2 + 1))(x^2 + 1)/((x^2 + n + 1)(x^2 + n)) = 1/((x^2 + n + 1)(x^2 + n)) > 0$.

d) Festes $n \geq 2$, $f_n(x') - f_n(x) < 0$ unter der Annahme zeigen, dass $x - x' < 0$ gilt. Hauptnenner und $(n - 1)$ sind > 0 und können ausgeklammert werden. Es bleibt der Zähler: $(x^2 + 1)(x^2 + n) - (x'^2 + 1)(x'^2 + n)$. Ausmultiplizieren zeigt, dass $(x^2 - x'^2)$ ausgeklammert werden kann, so dass das Ergebnis insgesamt $(n - 1)(x^2 - x'^2)(x^2 + x'^2 + (n + 1))/((x'^2 + 1)(x'^2 + n)(x^2 + 1)(x^2 + n))$ ist. Wegen $x^2 - x'^2 = (x - x')(x + x')$ gilt also, wegen der Annahme $x - x' < 0$, die Behauptung, da alle anderen Faktoren positiv sind.

e) Bildbereich $R(f_n) \equiv R_n : 0 < |n - 1|/|(x^2 + 1)(x^2 + n)| = (n - 1)/((x^2 + 1)(x^2 + n)) \leq (n - 1)/n = 1 - 1/n$. $\mathbf{R}_n = (0, 1 - 1/n]$, da $f_n(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$, d.h. wegen $D(f_n) = [0, \infty) : x \rightarrow \infty$, und $f_n(0) = 1 - 1/n$. Damit gilt: $\sup R_n = 1 - 1/n = \max R_n$. $\inf R_n = 0$ und $\min R_n$ existieren nicht, da $0 \notin R_n$.

f) $\inf R_n = 0$ für alle $n \geq 2$, also $\min_{n \geq 2} \{\inf R_n\} = 0$. $\min_{n \geq 2} \{\max R_n\} = \min_{n \geq 2} (1 - 1/n) = 1 - 1/2$, und $\sup_{n \geq 2} \{\max R_n\} = \sup_{n \geq 2} \{1 - 1/n\} = 1$, da man beliebig nahe an 1 kommen kann. $\max_{n \geq 2} \{\max R_n\}$ existiert nicht, da $1 \notin \{1 - 1/n\}_{n=2}^\infty$; nur im Grenzwert wird 1 erreicht.

Schaubild zur Aufgabe 1



Aufgabe 2: Reihen, Cauchy-Produkt**11 Pkte.**

a) Cauchy-Produkt von $T(\alpha; x)$ mit $T(\beta; x)$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha, \beta)$ mit $c_n(\alpha, \beta) = \sum_{l=0}^n \binom{\alpha}{l} x^l \binom{\beta}{n-l} x^{n-l} = x^n \sum_{l=0}^n \binom{\alpha}{l} \binom{\beta}{n-l}$; also ist

$$a_n(\alpha, \beta) = \sum_{l=0}^n \binom{\alpha}{l} \binom{\beta}{n-l}.$$

b) Da die Potenzreihen $T(\alpha; x)$ und $T(\beta; x)$ innerhalb ihres Konvergenzintervalls $|x| < 1$ absolut konvergieren, gibt das Cauchy-Produkt sicher für $|x| < 1$ das Produkt der beiden Potenzreihen, was wegen des Satzes von Taylor für $|x| < 1$ durch $(1+x)^\alpha (1+x)^\beta$ gegeben ist.

c) Wegen $(1+x)^\alpha (1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta}$ (Regel für allgemeine Potenz, die definiert ist als $a^x := \exp(x \ln(a))$) und der Taylorreihe $T(\alpha+\beta; x)$ für $(1+x)^{\alpha+\beta}$, falls $|x| < 1$, folgt durch Koeffizientenvergleich (der wegen des Identitätssatzes für Potenzreihen zulässig ist) die gesuchte Identität

$$\sum_{l=0}^n \binom{\alpha}{l} \binom{\beta}{n-l} = \binom{\alpha+\beta}{n}.$$

d) Beispiel $n = 2$, α , und β beliebige reelle Zahlen: $\binom{\alpha}{0} \binom{\beta}{2} + \binom{\alpha}{1} \binom{\beta}{1} + \binom{\alpha}{2} \binom{\beta}{0} = \beta(\beta-1)/2 + \alpha\beta + \alpha(\alpha-1)/2$ verglichen mit $(\alpha+\beta)(\alpha-1+\beta)/2$, was nach Ausmultiplizieren dasselbe ergibt.

Aufgabe 3: Integration**9 Pkte.**

a) Intervalllänge $1 - 0 = 1$ in n gleiche Teile: $\Delta_k \equiv \Delta = 1/n$. $t_0 = 0, t_1 = 1/n, \dots, t_n = 1$, d.h. $t_k = k/n, k = 0, 1, 2, \dots, n$.

b) Zwischenstellen ξ_k im Intervall I_k als rechte Intervallgrenzen nehmen, also $\xi_k = k/n$, damit der Summand der Aufgabe $1/(nx + yk) = (1/n)/(x + y(k/n))$ als $f(\xi_k)$ mit $f(x, y; t) := 1/(x + yt)$, zusammen mit $1/n = \Delta$ als Riemannsumme gelesen werden kann: $Z_{E_n} = \Delta \sum_{k=1}^n f(x, y; t = k/n)$.

c) Riemann-Integral ist dann:

$$\int_0^1 f(x, y; t) dt = \int_0^1 \frac{1}{x + yt} dt = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{y}{x}t} \frac{dt}{x} = \frac{1}{y} \int_0^{y/x} \frac{1}{1+u} du = \frac{1}{y} \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right).$$

Dabei wurde $x \neq 0, y \neq 0$ verwendet und die Variablensubstitution $u = (y/x)t$ im bestimmten Integral durchgeführt.

Damit gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{nx + yk} = \frac{1}{y} \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right).$$