Universität Karlsruhe | **Sommersemester 2005**

Mathematische Grundlagen der Physik | **V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld**
Ü.: Dr. Gieseke, SaalÜ.: Dr. habil. W. Lang

Geplanter Inhalt der Saalübung 1 am Montag, den 18. April 2005

I Aussagenlogik. Wahrheitstafeln

Gesetze von *de Morgan*:

$$\begin{array}{ll} \alpha) & \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)\ , \\ \beta) & \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)\ . \end{array}$$

Verbale Beispiele dazu.
Hinweis zur A, B, C Wahrheitstafel.

II Beweistechnik bei Mengen

$A = B$ als $A \subset B$ und $B \subset A$. Beispiel aus der ebenen Geometrie: Menge der Parabelpunkte auf zwei Arten.

III Abbildungen

Def. $A : D(A) \subset X \to Y$, $x \in D(A) \mapsto y = A\,x \in Y$. $D(A)$: Definitionsmenge. Y: Wertevorrat, Zielmenge, $R(A) := \{y \,|\, \exists x \in D(A) : y = A\,x\} \subset Y$: 'range' von A, Bildmenge, Bildbereich.
Begriffe: surjektiv, injektiv, bijektiv.
Beispiel: $A = f : x \mapsto x^2$ mit verschiedenen $D(A) \subset X = \mathbb{R}$ und $R(A) \subset Y = \mathbb{R}$.

IV Körperaxiome

Elemente von K: $a, b, c, ..., x, y, ...,$ genannt Zahlen.
Es gibt zwei Verknüpfungen, Addition und Multiplikation , die je zwei Zahlen a und b die Zahlen $a + b$ (Addition) und $a\,b$ (oder $b\,a$) (Multiplikation) so zuordnen, dass - für beliebige Elemente von K - die folgenden Regeln **A**, **B** und **C** gelten:

A) Axiome der Addition

A1) $(a + b) + c = a + (b + c)$. Assoziativgesetz.
A2) $a + b = b + a$. Kommutativgesetz.
A3) Es gibt eine (eindeutig bestimmte) Zahl (bezeichnet mit 0) mit der Eigenschaft:
$a + 0 = a$ für alle $a \in K$. Neutrales Element der Addition.
A4) Zu jeder Zahl $a \in K$ gibt es eine (eindeutig bestimmte) Zahl (bezeichnet mit $-a$) mit
der Eigenschaft $a + (-a) = 0$. (Man nennt $-a$ „die zu a negative Zahl".)

B) Axiome der Multiplikation

B1) $(a\,b)\,c = a(b\,c)$. Assoziativgesetz.
B2) $a\,b = b\,a$. Kommutativgesetz.
B3) Es gibt eine (eindeutig bestimmte) Zahl $\neq 0$ (bezeichnet mit 1) mit $a\,1 = a$ für alle $a \in K$.
B4) Zu jeder Zahl $a \neq 0$ gibt es eine (eindeutig bestimmte) Zahl $a^{-1} \in K$ mit $a\,a^{-1} = 1$.
a^{-1} heißt „die zu a reziproke Zahl".

C) $\mathrm{a}\,(\mathrm{b}+\mathrm{c}) = \mathrm{a}\,\mathrm{b} + \mathrm{a}\,\mathrm{c}$. Distributivgesetz.

Eine Menge K, die **A**, **B** und **C** erfüllt heißt Körper (engl. *field*).

Folgende Schreibweisen werden definiert:

$a - b = a + (-b)$,
$\frac{a}{b} = a/b = a\,b^{-1}$.
Wegen der Assoziativität kann man schreiben:
Für Summen mehrerer Terme: $a_1 + a_2 + ... + a_n =: \sum_{i=1}^{n} a_i$,
Für Produkte mehrerer Faktoren: $a_1\,a_2\,...\,a_n =: \prod_{i=1}^{n} a_i$,
$a^n := \underbrace{a\,a\,...\,a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N}$, $(a \neq 0)$
$a^{-n} := \underbrace{a^{-1}\,a^{-1}\,...\,a^{-1}}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N}$, $(a \neq 0)$.