Geplanter Inhalt der Saalübung 1 am Montag, den 8. Mai 2006

0. Fragen aus der Vorlesung:

Fr.1): Begriffe surjektiv, injektiv, bijektiv.
Fr.2): Endliche, abzählbare und unendlich abzählbare Mengen.

I. Folgerungen aus den Körperaxiomen A1) – A4), B1) – B4) und C) (siehe S. 2)

1) i) $-(-a) = a$, **ii)** $(a\,b)^{-1} = b^{-1}\,a^{-1} = a^{-1}\,b^{-1}$, falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

II. Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen D1) – D4) (siehe S. 2)

2a) Beweisen Sie für reelle Zahlen a, b, c und d mit $b > 0$ und $d > 0$:

$$\tfrac{a}{b} < \tfrac{c}{d} \Rightarrow \tfrac{a}{b} < \tfrac{a+c}{b+d} < \tfrac{c}{d} .$$

2b) Falls $a > 0$, $b > 0$: $a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

III. Schranken, $\sup, \inf, \max, \min$ (nicht behandelt in SÜ 1.)

Schranken: $M \neq \emptyset$, $M \subset \mathbb{R}$, obere Schranke von M, kleinste obere Schranke von M (Supremum von M , möglicherweise $\notin M$). Def. Maximum von M falls Supremum $\in M$. Analog Infimum und Minimum.

3) M als Intervall $I = [a, b) := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x < b \right\} \subset \mathbb{R}$, $a \neq b$.

IV. Betrag und Ungleichungen (nicht behandelt in SÜ 1.)

4) Zeigen Sie für $a \in \mathbb{R}^+ := \{ y \in \mathbb{R} \,|\, y > 0 \}$ und $x, x_0 \in \mathbb{R}$ die Äquivalenz der folgenden beiden Bedingungen: **i)** $|x - x_0| < a$, **ii)** $x_0 - a < x < x_0 + a$.

Veranschaulichen Sie sich die Menge $M := \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge |x - x_0| < a\}$ auf der Zahlengeraden.

V. Beweistechnik Vollständige Induktion

5a) Beispiel bei dem etwas schiefläuft: Je n Zahlen sind gleich! (nicht behandelt in SÜ 1)

Eine Zahl ist sich selber gleich. Gegeben $n + 1$ Zahlen. Picke n daraus (alle gleich, nach Induktionsannahme). Picke andere n daraus (alle gleich). Transitivität: alle $n + 1$ gleich. Fehler? Verwendeter Induktionsschluss für $n = 2$ nicht möglich.

5b) Beispiel bei dem es klappt: Endliche geometrische Reihe.

$q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} .$$

Für $q = 1$ ist diese Summe $n + 1$.

weiter auf Seite -2-

Körperaxiome $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ $\cdot$ wird hier nicht geschrieben

Elemente von $\mathbb{K}$: $a, b, c, ..., x, y, ...,$ genannt Zahlen.
Es gibt zwei Verknüpfungen, Addition und Multiplikation , die je zwei Zahlen a und b die Zahlen $a + b$ (Addition) und $a\,b$ (oder $b\,a$) (Multiplikation) so zuordnen, dass - für beliebige Elemente aus $\mathbb{K}$ - die folgenden Regeln $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ gelten:

A) Axiome der Addition

A1) $(a + b) + c = a + (b + c)$. Assoziativgesetz.
A2) $a + b = b + a$. Kommutativgesetz.
A3) Es gibt eine (eindeutig bestimmte) Zahl (bezeichnet mit 0) mit der Eigenschaft: $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$. Neutrales Element der Addition.
A4) Zu jeder Zahl $a \in K$ gibt es eine (eindeutig bestimmte) Zahl (bezeichnet mit $-a$) mit der Eigenschaft $a + (-a) = 0$. (Man nennt $-a$ „die zu a negative Zahl“.)

B) Axiome der Multiplikation

B1) $(a\,b)\,c = a(b\,c)$. Assoziativgesetz.
B2) $a\,b = b\,a$. Kommutativgesetz.
B3) Es gibt eine (eindeutig bestimmte) Zahl $\neq 0$ (bezeichnet mit 1) mit $a\,1 = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$.
B4) Zu jeder Zahl $a \neq 0$ gibt es eine (eindeutig bestimmte) Zahl $a^{-1} \in \mathbb{K}$ mit $a\,a^{-1} = 1$. a^{-1} heißt „die zu a reziproke Zahl“.

C) $\mathrm{a\,(b+c) = a\,b + a\,c}$. Distributivgesetz.

Eine Menge $\mathbb{K}$, die $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ erfüllt heißt Körper (engl. *field*).

Folgende Schreibweisen werden definiert:

$a - b = a + (-b)$,
$\frac{a}{b} = a/b = a\,b^{-1}$.

Wegen der Assoziativität kann man schreiben:
Für Summen endlich vieler Terme: $a_1 + a_2 + ... + a_n =: \sum_{i=1}^n a_i$,
Für Produkte endlich vieler Faktoren: $a_1\,a_2\,...\,a_n =: \prod_{i=1}^n a_i$,

$a^n := \underbrace{a\,a\,...\,a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N}$,

$a^{-n} := \underbrace{a^{-1}\,a^{-1}\,...\,a^{-1}}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N}$, $(a \neq 0)$.

Anordnungsaxiome D). Für beliebige Elemente a, b, c eines Körpers $\mathbb{K}$ (hier $\mathbb{R}$).

D1) Es gibt eine Relation, bezeichnet mit $<$, so dass eine der drei Möglichkeiten gilt: $a = b, \quad a < b, \quad b < a$.

D2) $a < b,\ b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivität).

D3) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, für jedes c (Monotoniegesetz der Addition).

D4) $0 < a,\ 0 < b \Rightarrow 0 < a\,b$ (Monotoniegesetz der Multiplikation).