
Geplanter Inhalt der Saalübung 9 am Montag, den 10. Juli 2006

I. Differenzieren von Potenzreihen

Beispiel: $F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)$ mit $|x| \leq 1$. $F'(x) = f(x) = 1/(1+x^2)$ für $|x| < 1$.

$F(x) = \arctan(x)$ zunächst für $|x| < 1$. Extra Stetigkeitsbetrachtung für $x = \pm 1$: $F(\pm 1) = \arctan(\pm 1) = \pm\pi/4$.

II. Regel nach de l'Hospital (Johann Bernoulli) Siehe Seite 2, Satz 8.16 .

i) $\lim_{x \rightarrow 0} (\exp(x) - \exp(-x))/x$, ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x}$, mit $r \in \mathbb{R}$,
iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\exp(x) - 1} \right)^2 \right)$.

III. Taylorpolynome, Darstellung einer Funktion durch ihre Taylorreihe

Spezialfall der allgemeinen binomischen Reihe ($\alpha = 1/2$).

Gesucht ist die Taylorentwicklung der Funktion

$f : I := [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$, $x \mapsto f(x) = \sqrt{1+x}$ in einem zu bestimmenden x -Intervall.

a) Berechnen Sie die Taylorpolynome $T_n(x; x_0 = 0)$. Was ist $f^{(k)}(x)/k!$?

b) Wie sieht die Taylorreihe aus und welches ist ihr Konvergenzradius R ?

c) Verwenden Sie das Lagrangesche Restglied $R_n(x, x_0 = 0, \xi)$, um zu zeigen, dass die Funktion f sicher für alle $|x| < R$ durch ihre Taylorreihe dargestellt wird.

d) Betrachten Sie die beiden Randpunkte $x = \pm R$. Siehe unten.

e) Schreiben Sie zum Schluss für $|x| \leq R$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} C_k \left(\frac{-x}{4} \right)^k ,$$

mit gewissen nichtnegativen ganzen(!) Zahlen C_k . Wie heißen diese Zahlen?

Wie sieht die erzeugende Funktion $c(x)$ dieser Zahlen $\{C_k\}_0^{\infty}$ aus?

Für welche x konvergiert $c(x)$?

Zu d) Randpunktediskussion

i) $x = -1$: Abschätzung des Restgliedbetrags nach oben durch $(1/2) C_n/4^n$. Frage ob Nullfolge. Zeige: Reihe mit diesen Gliedern ist konvergent. Dann nach Satz sicher Nullfolge. Reihenkonvergenz hier via *Raabe-Kriterium*, da Quotientenkriterium ungeschlüssig. Dazu: $a_{k+1}/a_k = (2k-1)/(2k+2) = 1 - 3/(2k+2) \leq 1 - 3/((9/4)k)$ falls $k \geq 8$. Also $a_{k+1}/a_k \leq 1 - (4/3)/k$. *Raabe-Kriterium* mit $\beta = 4/3 > 1$. Also: $\sqrt{1+(-1)} = 0 = 1 - (1/2) \sum_{k=0}^{\infty} C_k/4^k$.

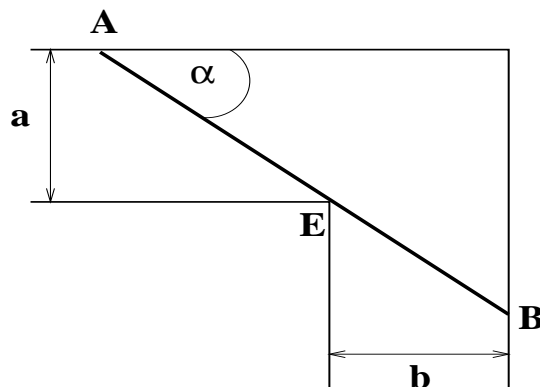
ii) $x = +1$: Restgliedbetrag ist auch $< (1/2) C_n/4^n$. Nullfolge, da Reihe mit diesen Gliedern nach i) konvergent.

Taylorreihe ist auch konvergent, via *Leibniz-Kriterium*. Dazu zeige $C_k/4^k$ ist monoton fallende Nullfolge. Monotonie klar und Nullfolge, da in i) gezeigt, dass Glieder einer konvergenten Reihe. Also $\sqrt{2} = 1 + 1/2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_k/4^k$

IV. Differentiation, Extrema (nicht behandelt, siehe Saalübung 10)

Betrachten Sie einen Kanal der abgebildeten rechteckigen Geometrie (Breiten a, b), mit einem als Geradenstück \overline{AB} gedachten schwimmenden Stab.

Gesucht ist der Winkel α der zur minimalen Länge von \overline{AB} führt.



a) Bestimmen Sie, bei gegebenen Breiten a und b , die Stablänge $L = \overline{AB}$ in Abhängigkeit vom angegebenen Winkel α , unter der Voraussetzung, dass der Stab die Ecke E berührt.

b) Schreiben Sie die gefundene Funktion $L = L(\alpha)$ so um, dass neben a und b , nur noch $\tan \alpha =: x$ auftritt, und nennen Sie diese neue Funktion $\tilde{L}(x)$. D.h. es gilt: $L(\alpha) = \tilde{L}(x = \tan \alpha)$.

Hinweis: Berechnen Sie aus $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ zunächst $1/\cos \alpha$ als Funktion von $\tan \alpha$. Verfahren Sie analog um auch $1/\sin \alpha$ durch $\tan \alpha$ auszudrücken.

c) Bestimmen Sie das endliche Extremum der Funktion $\tilde{L}(x)$, und nennen Sie es x_* .

d) Welchen Grenzwert hat $L(\alpha)$ für die beiden Winkel $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi/2$?

e) Bestimmen Sie die Art des Extremums von $\tilde{L}(x)$ der Stelle x_* durch Berechnung und Untersuchung von $\tilde{L}''(x = x_*)$.

f) Schreiben Sie die extremale Länge $L(\alpha_*) = \tilde{L}(x_*)$ auf.

Zu II. Regel nach *de l'Hospital* (Johann Bernoulli)

Satz 8.16: Seien f und g in einer Umgebung $\mathcal{U}(x_0)$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ in $\mathcal{U}(x_0)$, mit $x \neq x_0$. Außerdem gelte $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

$$\text{Falls } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a, \text{ eigentlich oder uneigentlich, dann gilt:}$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a, \text{ wobei auch } x_0 = \pm\infty \text{ sein kann.}$$

Beweis: Mit erweitertem Mittelwertsatz.