
Inhalt der Saalübung 1 vom Montag, den 21. April 2008

A) Aussagenlogik. Wahrheitstafeln

1. Kontraposition zu $A \Rightarrow B$: $\neg B \Rightarrow \neg A$.

2. Zweistellige Verknüpfungen.

$2^4 = 16$ mögliche w, f Verteilungen, davon vier, A, B und $\neg A, \neg B$, nicht interessant. Es bleiben 5 Verknüpfungen und ihre Negationen. Speziell *H. M. Sheffer* | für $\neg(A \wedge B)$, *C. S. Peirce* $A \downarrow B$ für $\neg(A \vee B)$ und $A \underline{\vee} B$ (entweder oder) für $\neg(A \Leftrightarrow B)$.

$$\neg(A \underline{\vee} B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Gesetze von *de Morgan*:

$$\alpha) \quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B),$$

$$\beta) \quad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B).$$

3. Hinweis zu A, B, C Wahrheitstafel: $2^3 = 8$ mögliche w, f Verteilungen.

B) Beweistechnik bei Mengen

1. $A = B$ als $A \subset B$ und $B \subset A$.

Beispiel aus der ebenen Geometrie: Menge der Parabelpunkte auf zwei Arten. (nicht vorgeführt):

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = 4ax\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x+a\}.$$

Menge B aus der geometrischen Definition einer Parabel. Beweise $A = B$.

2. Man zeige das folgende Distributivgesetz:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

C) Beweistechnik: Widerspruchsbeweis

Allgemein. Beispiel mit kartesischer Menge $A \times B$:

$$X \times Y = \emptyset \Leftrightarrow (X = \emptyset) \vee (Y = \emptyset).$$

Bemerkung, nach Frage: Definiere kartesische Menge $X \times Y$ als \emptyset falls X oder Y leere Mengen sind. In diesem Fall nichts zu beweisen.

Richtung \Rightarrow per Widerspruchsbeweis (zur Voraussetzung).

Richtung \Leftarrow per Beweis der Kontraposition.

D) Abbildungen

Def. $A : D(A) = X \rightarrow Y, x \in D(A) \mapsto y = Ax \in Y$. $D(A)$: Definitionsmenge. Y : Wertevorrat, Zielmenge, $R(A) := \{y \mid \exists x \in D(A) : y = Ax\} \subset Y$: 'range' von A , Bildmenge, Bildbereich.

Begriffe: surjektiv, injektiv, bijektiv.

Eine Frage war, ob injektiv definiert wird als $x_1 \neq x_2$ mit $x_1, x_2 \in D(A) \Leftrightarrow Ax_1 \neq Ax_2$, statt: wenn $x_1 \neq x_2$ mit $x_1, x_2 \in D(A) \Rightarrow Ax_1 \neq Ax_2$. Antwort?

Die \Leftarrow Richtung ist, so wie sie dasteht, nicht sinnvoll, da es i.a. verschiedene x (Urbilder) zu einem y (Bild) geben kann. Man könnte die Menge der Urbilder zu $y_1, y_2 \in R(A)$, mit $y_1 \neq y_2$, definieren und i.a. zeigen, dass sie, wegen der Eindeutigkeit von A , leeren Durchschnitt haben. Falls diese zwei Urbildmengen dann jeweils nur aus genau einem Element bestehen, ist A injektiv.

Beispiel: $A = f : X \rightarrow Y, x \mapsto x^2$ mit verschiedenen $D(f) \subset \mathbb{R}$ und Y

1. $X = D(f) = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$.

$R(f) = \mathbb{R}_{\geq} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$. f eindeutig, nicht surjektiv (keine Abb. auf), nicht injektiv (nicht eineindeutig), z. B. $x_1 = 1, x_2 = -1$ aber $f(1) = f(-1)$. Nicht bijektiv (umkehrbar).

2. $X = D(f) = \mathbb{R}_{\geq}, Y = \mathbb{R}_{\geq}$.

$f : \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}, x \mapsto y = x^2$ ist surjektiv, injektiv, also bijektiv. (nur ein Ast der Parabel). Nicht vorgeführt: Die Umkehrfunktion f^{-1} existiert.

$f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}, y \mapsto x = \sqrt{y}$.

Auch geometrisch als Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$. Dann aber $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}, x \mapsto y = \sqrt{x}$.

Bem.: Die Wurzel ist immer nichtnegativ und 0 genau dann, wenn $x = 0$ (später in der Vorlesung).

Als hintereinandergeschaltete Abbildungen: $f \circ f^{-1} = id$, die identische Funktion. Auch $f^{-1} \circ f = id$.