

---

Inhalt der Saalübung 9 vom Montag, den 23. Juni 2008

---

## Funktionen. Teil II

### 1. Funktionenreihen. Weierstrass-Kriterium

Untersuchen Sie die folgende Funktionenreihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}, \text{ mit } x \in [0, 1].$$

Weierstrass- Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen (Satz 8.11)

$$|f_n(x)| = \frac{nx^2}{n^3 + x^3} \text{ für } x \in D = [0, 1] \leq \frac{n}{n^3 + 0} = \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist  $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  eine (gleichm.) Majorante, und die Funktionenreihe gleichmäßig konvergent. Die Konvergenz der  $\zeta(2)$ -Reihe folgte aus der Vorlesung, zusammen mit der Übung 1a), Blatt 8.

Damit auch punktweise konvergent für jedes  $x \in [0, 1]$ . Summenfunktion als spezielle hypergeometrische Funktion.

Wert von  $\zeta(2)$  als „Basler Problem“ der zwei *Bernoulli*-Brüder Jakob und Johann. Wert  $\frac{\pi^2}{6}$  erst 1736 von *Euler*.

### 2. Eigenschaften von $\sin$ und $\cos$ aus den Reihendarstellungen

$\alpha$ )  $\cos$  und  $\sin$  sind auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig (da Potenzreihen mit  $R = \infty$  und Satz 6.9 aus gleichmäßiger Konvergenz und Stetigkeit der Summenglieder, folgt für die Summe, d.h.  $\cos$ , bzw.  $\sin$  Stetigkeit).

$\beta$ )  $\cos$  bzw.  $\sin$  ist eine gerade bzw. ungerade Funktion.

$\gamma$ )  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ . Aus  $|e^{ix}| = 1$  und *Euler*-Formel. Für den Punkt  $e^{ix}$  des Einheitskreises erhält man  $\cos$  bzw.  $\sin$  als Real- bzw. Imaginärteil. Rechtwinkliges Dreieck mit Winkel  $x$  im Bogenmaß. (Einheitskreisbogen von  $z = 1$  bis  $z = e^{ix}$  erst mittels Differential- und Integralrechnung.)

$\delta$ ) Additionstheoreme (siehe Blatt 9, Aufgabe 1)

Man benötigt noch die Definition von  $\pi$  (bzw.  $\pi/2$ ).

(i) Definition von  $\pi/2$  (nach *E. Landau*):

Die reelle Funktion  $\cos$  hat mindestens eine positive Nullstelle. Bezeichnung  $\pi/2$  für die kleinste der positiven Nullstellen.

Außerdem gilt:  $\sin$  ist auf  $[0, \pi/2]$  streng monoton wachsend und  $\sin(x) > 0$  im Intervall  $(0, \pi/2]$ .

Beweise: Später mit zwei Sätzen der Differentialrechnung (Monotonie- und Mittelwertsatz) einfach.

Zeigen Sie mit diesen und direkt aus der Reihendefinition folgenden Resultaten die folgenden speziellen Werte, die Symmetrie und die Periodizität der  $\sin$  und  $\cos$  Funktionen mit Periode  $2\pi$ :

## 2. Fortsetzung: Trigonometrische Funktionen

- (ii)  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ ,  $\sin(\pi) = 0 = \sin(2\pi)$ ,  $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$ ,  
 $\cos(\pi) = -1$ ,  $\cos(2\pi) = 1$ ,  $\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$ .
- (iii)  $\sin(\pi/2 - x) = \sin(\pi/2 + x)$ , Spiegelsymmetrie um  $x = \frac{\pi}{2}$ ;  
also  $\sin(x) > 0$  auf  $(0, \pi)$ , d.h.  $\pi$  ist die kleinste positive Nullstelle von  $\sin$ .  
Analog:  $\cos(\pi/2 - x) = -\cos(\pi/2 + x)$ , Punktsymmetrie um  $x = \frac{\pi}{2}$ .
- (iv)  $\sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$ ,  $\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,
- (v)  $\sin$  ist auf  $[-\pi/2, +\pi/2]$ , bzw.  $[\pi/2, 3\pi/2]$ , streng monoton wachsend, bzw. fallend;  
 $\cos$  ist auf  $[0, \pi]$ , bzw.  $[\pi, 2\pi]$ , streng monoton fallend, bzw. wachsend.

Zu ii): Additionstheoreme und  $\gamma$ ).

Zu iii): Additionstheoreme.

Zu iv): Für  $n = 1$  aus i) und vollständige Induktion mithilfe des Additionstheorems für positive  $n$ . Für negative  $n$  ( $n = 0$  trivial) mittels iii).

Zu v): Z. B. Zeige  $\cos$  streng monoton fallend in  $[0, \pi/2]$ . Dann mit iii) für  $\cos$  auch auf dem Intervall  $[\pi/2, \pi]$ . Verwende  $x < x'$ ,  $x, x' \in [0, \pi/2]$ .  $x' = x + \Delta$ , mit  $0 \leq \cos(\Delta) < 1$  (aus  $\gamma$ ), i) und  $\cos(\Delta) \geq 0$ , aus der Stetigkeit von  $\cos$  und  $\cos(0)=1$  und Def.  $\pi/2$ ). Dann  $\cos x' = \cos(x + \Delta)$  mit Additionstheorem  $= \cos x \cos \Delta < \cos x$ .

## 3. Kontrahierende Selbstabbildungen. Dehnungsbeschränkte Abbildungen. Fixpunkte. Lipschitz-Bedingung und -Stetigkeit

Beispiel:  $x \in I = [-1, +1]$ ,  $f_\mu(x) := 1 - \mu x^2$  zunächst mit  $\mu \in [0, 2]$ , später mit  $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ .

Definition:  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ ,  $x \mapsto f(x)$  heißt  $\alpha$ -kontrahierende (Selbst)abbildung wenn  $\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$ , mit  $\alpha \in [0, 1)$ .

**Satz 1:**  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ ,  $x \mapsto f(x)$  und  $f$  stetig auf  $I \Rightarrow f$  hat mindestens einen Fixpunkt im Innern von  $I$ .

Beweis: Aus dem Zwischenwertsatz (ZWS) mit Hilfsfunktion  $g(x) = f(x) - x$ . D.h. Nullstellen von  $g$  entsprechen Fixpunkten von  $f$ . Wegen der Selbstabbildung gilt:  $g(a) \geq 0$  und  $g(b) \leq 0$ . Falls  $g(a) = 0$  oder  $g(b) = 0$ : fertig. Sonst:  $g(a) > 0$  und  $g(b) < 0$ . ZWS zeigt Existenz von  $c \in (a, b)$  mit  $g(c) = 0$ , also Fixpunkt von  $f$  im Innern von  $I$ .

Im Beispiel: Fixpunkte für  $\mu = 0$  ist  $x_F = 1$ . Für  $\mu = 2$  findet man zwei Fixpunkte  $\{-1, 1/2\}$  und für  $\mu \in (0, 2)$  einen Fixpunkt  $x_F = \frac{1}{2\mu}(-1 + \sqrt{1 + 4\mu})$ .

**Satz 2:**  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ ,  $x \mapsto f(x)$ ,  $\alpha$ -kontrahierend  $\Rightarrow f$  hat genau einen Fixpunkt.

### 3. Fortsetzung

Beweis zu **Satz 2**:

i) Sogenannte Defektungleichung herleiten ( $f(x) - x$  ist der Defekt zu  $f(x) = x$ ):

$$|x - y| \leq \frac{1}{1 - \alpha} (|f(x) - x| + |f(y) - y|), \quad \forall x, y \in I.$$

Aus:  $|x - y| = |x - f(x) + f(x) - f(y) + f(y) - y|$  mit Dreiecksungleichung und Voraussetzung  $\alpha$ -kontrahierend.

ii) Jede  $\alpha$ -kontrahierende Abbildung ist eine **dehnungsbeschränkte Abbildung**. D.h.  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}, \exists L \in \mathbb{R}_{\geq}$ , so dass  $\forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ . Solche Abbildungen mit der Dehnungsschranke  $L$ , die auch *Lipschitz-Konstante* heißt, sind automatisch (sogar gleichmäßig) stetig. Dehnungsbeschränkte  $f$  nennt man **Lipschitz-stetig**. Die Ungleichung mit  $L$  heißt auch *Lipschitz-Bedingung*.

iii) Zur Eindeutigkeit des Fixpunktes  $x_F$  dann ein Widerspruchsbeweis mithilfe der Defektungleichung:  $x = f(x)$  und  $y = f(y)$  mit Annahme  $x \neq y$ . i) zeigt:  $|x - y| \leq \frac{1}{1 - \alpha} (0 + 0) = 0$ . Widerspruch zur Annahme  $x \neq y$ .

**Approximation durch Iteration:**  $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$ . Siehe Skizze für  $\alpha = 1/2$  kontrahierende Abbildung  $f_{\mu=1/4}$  mit Fixpunkt  $x_F = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0.83 < 1$ .

Siehe *W. Walter: Analysis 1, Seiten 312-315, 115*.

Skizzen zu Abbildungen  $f_{\mu}$  und Fixpunkte

