

Übungen, Blatt 1

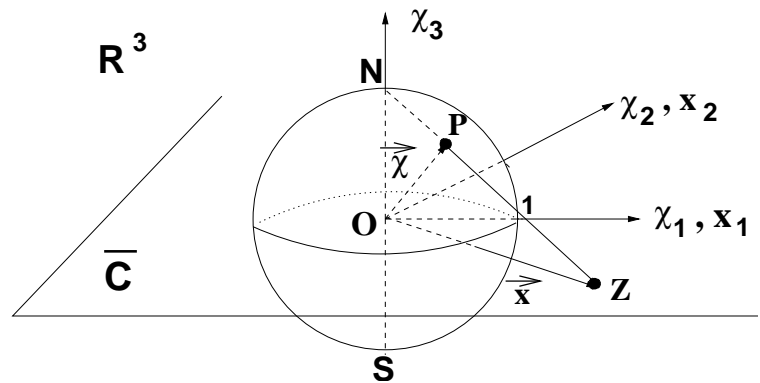
1) $SU(2)$ Matrizen.

Beweisen Sie, dass jede unitäre, 2-dimensionale Matrix U mit $Det U = +1$ (d.h. jedes Element der Matrixgruppe $SU(2)$) in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

2) Stereographische Projektion. Kugeldrehungen, sphärische Metrik.

a) Die skizzierte stereographische Projektion bildet einen Punkt P der Einheitskugeloberfläche S^2 im \mathbb{R}^3 mit kartesischen Koordinaten (χ_1, χ_2, χ_3) (Ortsvektor $\vec{\chi}$) umkehrbar eindeutig auf einen Punkt Z (Ortsvektor \vec{x}) der erweiterten komplexen Ebene $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit Koordinaten $z := x_1 + i x_2$ ab. D.h. $S^2 \leftrightarrow \bar{\mathbb{C}}, \vec{\chi} \leftrightarrow \vec{x}$.



i) Berechnen Sie die Z Koordinaten (x_1, x_2) aus den Koordinaten (χ_1, χ_2, χ_3) von P .

ii) Schreiben Sie die Umkehrtransformation auf, und verwenden Sie dazu die komplexe Schreibweise z und $\bar{z} := x_1 - i x_2$.

b) In welcher Beziehung stehen die Koordinaten z_1 und z_2 zweier S^2 Diametralpunkte nach der stereographischen Projektion? Nennen Sie die Abbildung die $z = z_1$ auf $v(z) = z_2$ abbildet v . Diese Abbildung v ist involutorisch. Ist v eine Möbius-Transformation?

c) Eine Drehung der Einheitskugel um irgendeine Achse durch den Nullpunkt 0 transformiert zwei beliebige Diametralpunkte auf S^2 wieder in (i.A. in andere) Diametralpunkte. Solch eine Drehung induziert *via* stereographische Projektion eine Möbius-Transformation w . Behauptung: Sie kann immer wie folgt geschrieben werden. $w : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}, z \mapsto w(z) = (\alpha z + \beta)/(-\bar{\beta} z + \bar{\alpha})$ mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Hinweis zum Beweis: Fordern Sie die Invarianz der in Teil b) gefundenen Diametralpunktbeziehung zwischen z_1 und z_2 unter der zunächst allgemein angesetzten Möbius-Transformation w .

d) Nach diesen Vorarbeiten soll die sog. sphärische Metrik $d_s(z_1, z_2)$ auf $\bar{\mathbb{C}}$ gefunden werden, die folgendermaßen definiert ist. Sie ist die kleinste Entfernung auf S^2 zwischen den zwei zu z_1 und z_2 gehörenden S^2 -Punkten P_1 und P_2 ; d.h. sie misst die Bogenlänge eines Einheitskreisabschnittes. Um diese Metrik zu finden, kann man durch eine Kugeldrehung zunächst P_1 auf den Südpol S und P_2 auf einen Punkt P'_2 mit Koordinaten $(\chi_1 > 0, 0, \chi_3 = \pm\sqrt{1-\chi_1^2})$ bringen. Dann kann die gesuchte Bogenlänge $\varphi = \angle(S, P'_2) = d_s(z'_1 = 0, z'_2 = x > 0)$ leicht angegeben werden. Geben Sie die Bogenlänge φ als Funktion von x an.

Wie sieht die Möbius-Transformation w von Teil c) aus, die die stereographischen Bilder Z_1 und Z_2 von P_1 und P_2 auf $w(z_1) = 0$ und $w(z_2) = x > 0$ bringt?

Wie sieht demnach die gesuchte sphärische Metrik $d_s(z_1, z_2)$ aus?

e) Was ist $ds := d_s(z, z + dz)$ in erster Ordnung in dz ? Was ist ds^2 ?