
Übungen, Blatt 9

---

24) Killinggleichung im Fall der Kugeldrehungen im $\mathbb{R}^3$

a) Berechnen Sie für die Kugeldrehungen (spezielle *Möbius*-Tansformationen auf $\overline{\mathbb{C}}$ mit Parametern α, β) von Aufgabe **2)**, Blatt 1, deren infinitesimale Transformation

$$z' \;=\; z \,-\, \zeta(z)\;, \quad \bar{z}' \;=\; \bar{z} \,-\, \bar{\zeta}(\bar{z})\;,\ \text{mit}\ \bar{\zeta}(\bar{z}) \,:=\, \overline{\zeta(z)}\;.$$

Verwenden Sie dazu $\alpha \;\rightarrow\; 1 + \delta\alpha$, $\beta \;\rightarrow\; \delta\beta$ und analog für $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$. Welche Bedingung muss für $\delta\alpha$ gelten?

b) Verifizieren Sie mit der früher berechneten Metrik $g_{z,\bar{z}}(z,\bar{z})$ (Siehe Lösungen zu Blatt 1, Aufgabe **2e)**) die *Killing*gleichung

$$(\partial_z\,\zeta(z) \,+\, \partial_{\bar{z}}\,\bar{\zeta}(\bar{z})\,)g_{z,\bar{z}}(z,\bar{z}) \;+\; \zeta(z)\,\partial_z\,g_{z,\bar{z}}(z,\bar{z}) \;+\; \bar{\zeta}(\bar{z})\,\partial_{\bar{z}}\,g_{z,\bar{z}}(z,\bar{z}) \;=\; 0\;.$$

25) $\mathbf{S^3}$ Diametralpunktbeziehung nach stereographischer Projektion

a) Wie sieht die Diametralpunktbeziehung für die Einheitskugeloberfläche S^3 in vier Dimensionen aus, wenn man sie für die stereographisch projezierten Koordinaten ζ_i, $i = 1, 2, 3$, im $\overline{\mathbb{R}^3}$ schreibt? Welche Folgerungen lassen sich daraus ziehen?

b) Verifizieren Sie, dass die infinitesimalen $SU(2) \otimes SU(2)$-Transformationen (Parameter $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$) in $\overline{\mathbb{R}^3}$ die gefundene Diametralpunktbeziehung invariant lassen.

26) Killinggleichung im Fall der $\mathbb{R}^4$ Kugeldrehungen und $\vec{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{x})$-Formvariationen

a) Zeigen Sie, dass die Metrik $g_{ij} \;=\; \delta_{ij}/(\,1 + \vec{\pi}\cdot\vec{\pi}/F^2\,)^2$ (mit $\vec{\pi}\cdot\vec{\pi} \;:=\; \pi^i\,\delta_{ij}\pi^j$) und die als infinitesimale $\pi-$Koordinatentransformation ($\vec{\pi}' \;=\; \vec{\pi} \;-\; \vec{\xi}(\vec{\pi})$) aufgefasste $SU(2) \otimes SU(2)$ Transformation

$$\xi^p \;=\; -\delta\pi^p \;=\; (\vec{\alpha}\times\vec{\pi})^p \;+\; \vec{\beta}\,\cdot\,\vec{\pi}\;\pi^p/F \,+\, \frac{1}{2}\,(1 \,-\, \vec{\pi}\,\cdot\,\vec{\pi}/F^2)\,F\,\beta^p\,, \quad \text{für}\ p = 1, 2, 3,$$

die folgende *Killing*gleichung erfüllt

$$\xi^p\,\partial_p\,g_{ij}(\vec{\pi}) \;+\; \partial_i\,\xi^p\,g_{pj}(\vec{\pi}) \;+\; \partial_j\,\xi^p\,g_{ip}(\vec{\pi}) \;=\; 0\;.$$

b) Berechnen Sie $\delta\,g_{ij}$ mit dem oben gegebenen $g_{ij}(\vec{\pi}(x))$, wenn die in Teil **a)** verwendete infinitesimale $SU(2) \otimes SU(2)$-Transformation (Parameter $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$) für die Felder $\vec{\pi}(x)$ verwendet wird. Verschwindet diese Variation?

c) Man fasst $\partial_a\,\pi^k$ unter allgemeinen $\pi-$Koordinatentransformationen als Vektor mit oberem Index auf, damit $2\,\mathcal{L} \;=\; \partial_a\,\pi^i\,g_{i,j}(\vec{\pi})\,\partial^a\,\pi^j$ ein Skalar wird. Wie sieht also $\delta(\partial_a\,\pi^k)$ aus? Was ergibt sich nach Spezialisierung auf die $SU(2) \otimes SU(2)$-Isometrie von Teil **a)**?

d) Was ist die Formvariation des Feldes $\partial_a\,\pi^k(x)$ unter $SU(2) \otimes SU(2)$-Transformationen? Vergleichen Sie mit Teilaufgabe **c)**?

e) Ist es überraschend, dass beide Variationen von $g_{i,j}$ im γ^5-Transformationsfall nicht übereinstimmen?