
Übungen, Blatt 1

---

1) Orthogonalität und Normierung der *Legendre*-Polynome

a) Zeigen Sie mittels der *Rodrigues* Formel der *Legendre*-Polynome $\{P_l(x)\}_0^\infty$, $x \in [-1, +1]$,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} \, (x^2 - 1)^l \quad , \quad l \in \mathbb{N}_0 \; ,$$

die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{+1} dx \; P_n(x) \; P_m(x) \;\; = \;\; \frac{2}{2\,n+1} \, \delta_{n,m} \quad .$$

b) Zeigen Sie, dass gilt: $P_l(1) = 1$. Was ist $P_l(-1)$?

2) Erzeugende Funktion der *Legendre*-Polynome

Beweisen Sie, dass für die erzeugende Funktion

$$g(z, x) \;\; = \;\; 1/\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2} \;\; = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) \; z^n$$

gilt: $Q_n(x) \equiv P_n(x)$, wobei die $\{P_n(x)\}$ in Aufgabe **1** definiert sind.
Wo ist Ihnen diese erzeugende Funktion begegnet?

Hinweis: Zeigen Sie, dass $Q_n(x)$ ein Polynom vom Grad n mit $Q_n(1) \equiv 1$ ist, und die $\{Q_n(x)\}$ die von Aufgabe **1** bekannte Orthogonalitätsrelation und Normierung der $\{P_n(x)\}$ erfüllen. Reicht dies als Beweis?

3) 3-Term Rekursionsformel der *Legendre*-Polynome

a) Leiten Sie mit Hilfe der von Aufgabe **2** bekannten erzeugenden Funktion der *Legendre*-Polynome die folgende Rekursionsformel her:

$$(l + 1) \; P_{l+1}(x) \;\; = \;\; (2l + 1)\, x \; P_l(x) \; - \; l \; P_{l-1}(x) \quad , \quad l \; \in \; \mathbb{N}_0 \quad , P_{-1}(x) \equiv 0 \; , \;\; P_0(x) \equiv 1 \quad .$$

b) Zeigen Sie, unter Verwendung der erzeugenden Funktion und der Rekursionsformel der *Legendre*-Polynome,

$$\begin{aligned} P'_{l+1}(x) \; - \; P'_{l-1}(x) \quad &= \quad (2l + 1) \; P_l(x) \quad , \\ (1 - x^2) \; P'_l(x) \quad &= \quad -l\,x \; P_l(x) \; + \; l \; P_{l-1}(x) \quad , \quad l = (0), 1, 2, \ldots \quad . \end{aligned}$$

4) Minimaleigenschaft der *Legendre*-Polynome

Zeigen Sie, dass die monischen *Legendre*-Polynome $p_n(x) \; := \; 2^n (n!)^2/(2n)! \; P_n(x)$ (führender Koeffizient ist 1) folgende Minimaleigenschaft besitzen:

$$\int_{-1}^{+1} dx \; q_n^2(x) \geq \int_{-1}^{+1} dx \; p_n^2(x) \;\; = ? \; ,$$

wobei $q_n(x)$ ein beliebiges monisches, reelles Polynom vom Grad n ist. Wann gilt Gleichheit?