Übungen, Blatt 14

36) Orthogonalitätsmaß der $(AB)^\infty$ Kettenpolynome $\{S_n(x)\}$

a) Zeigen Sie, dass im Fall der unendlichen $AB-$Kette (lineare, longitudinale Schwingungen, Wechselwirkung nächster Nachbarn, Federn $\varkappa_n \equiv \varkappa$, $r = m_B/m_A = m_1/m_0$) keine *Dirac*-Maß Beiträge vorhanden sind und berechnen Sie das absolut stetige Maß , d.h. die Gewichtsfunktion $w(x)$, wobei die beiden Bänder, für $r \geq 1$, bzw. $r \leq 1$, wie folgt gegeben sind:
$B_1 = [0, \frac{1}{r}]$, $B_2 = [1, 1 + \frac{1}{r}]$, bzw. $B_1 = [0, 1]$, $B_2 = [\frac{1}{r}, 1 + \frac{1}{r}]$.

b) Plotten Sie diese Gewichtsfunktion $w(x)$ (mit $x = \hat{x}\ x_{max}$), und vergleichen Sie sie mit der differentiellen Spektaldichte $\mathcal{G}_2(\hat{x})$.

37) *Dirac*-Maß bei den $(ABA)^\infty-$Kettenpolynomen $\{S_n(x)\}$

Berechnen Sie den Beitrag der $\delta-$ Funktionsbeiträge zum Orthogonalitätsmaß der $\{S_n(x)\}$ Kettenpolynome im Fall $N = 3$, $m_0 = m_2 \equiv m_A$, $m_1 \equiv m_B$, $r := m_B/m_A$, $\varkappa_n \equiv \varkappa$. Normierung: $x \equiv \omega^2/(2\,\omega_0^2)$.

Behauptung:

$$d\sigma_{\text{Dirac}} = \frac{r}{\sqrt{(r-1)^2 + r}} \begin{cases} (r-1)\ x_-\ \delta(x - x_-(r))\ dx & \text{für } r > 1 \\ (1-r)\ x_+\ \delta(x - x_+(r))\ dx & \text{für } 0 < r < 1 \end{cases} ,$$

mit $2r\ x_\pm(r) = 1 + r \pm \sqrt{(1-r)^2 + r}$.

38) Abwesenheit des *Dirac*-Maß Beitrages bei $(AABA)^\infty$- Kettenpolynomen $\{S_n(x)\}$

Zeigen Sie, dass es für unendliche $AABA-$Ketten vom Typ, wie sie in Aufgabe **36)** betrachtet wurden ($m_0 = m_1 = m_3 \equiv m_A$, $m_2 \equiv m_B$, $r \equiv m_B/m_A$, Normierung $x \equiv \omega^2/(2\omega_0^2)$), kein Beitrag zum reinen Punktspektrum gibt.