

---

Übungen, Blatt 9

---

**23)** Ornstein-Uhlenbeck Diffusionsprozeß (Teil II)

Es soll die (exponentielle) erzeugende Funktion

$$g_H(x, y; z) := \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) H_n(y) \frac{z^n}{n!}$$

für die *Hermite*-Polynome berechnet werden.

- Wie sieht die explizite Form von  $H_n(x)$  aus?
- Setzen Sie dieses explizite  $H_n(x)$  in  $g_H(x, y; z)$  ein, und verwenden Sie die Doppelsummenregel *DS2* (Lösungen zu Blatt 6, S.4).
- Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+k}(x) \frac{t^n}{n!} = e^{2xt-t^2} H_k(x-t),$$

indem Sie die erzeugende Funktion

$$h_H(x; t, v) := \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+k}(x) \frac{t^n}{n!} \right) \frac{v^k}{k!}$$

berechnen. (*Cauchy*-, d.h. *DS1*-Regel anwenden.)

- Unter Verwendung der Behauptung vom Teil **c)**, der expliziten Form von  $H_{2k}(x)$  aus Teil **a)**, einer Umsummierung und der Summation einer Reihe erhält man das gesuchte Ergebnis für  $g_H(x, y; z)$ .
- Wie sieht demnach die explizite Form der *Ornstein-Uhlenbeck* Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(\tau, q, q')$  aus?

**24)** Momentendeterminante aus Koeffizienten der Rekursionsformel

- Drücken Sie den  $\tilde{D}_n$ -Koeffizienten der 3-Term Rekursionsformel eines monischen *OPS* durch die Hankel-Determinanten  $\{H_k\}$  der Momente aus.
- Finden Sie die Hankel-Determinante der Momente,  $H_n$ , als Funktion der Koeffizienten  $\{\tilde{D}_i\}_0^n$  der 3-Term Rekursionsformel eines monischen *OPS*.

**25)** Schranken für Nullstellen orthogonaler Polynome

Für jede Nullstelle  $x_i$  eines Polynoms  $p(x) \equiv p_n(x)$  vom Grad  $n$  mit verschiedenen reellen Nullstellen gilt:

$$0 \leq \left[ 3(n-2)(p''(x_i))^2 - 4(n-1)p'(x_i)p'''(x_i) \right] / (p'(x_i))^2 .$$

Fortsetzung zur Aufgabe **25**

- a) Schreiben Sie zum Beweis  $p(x) = (x - x_i) q(x)$ , und zeigen Sie zunächst für die  $m$ -te Ableitung:  $p^{(m)}(x_i) = m q^{(m-1)}(x_i)$ . Berechnen Sie dann die Summen (der Strich deutet an, dass der singuläre Summand weggelassen werden soll):

$$\sum_{k=1}^n{}' \frac{1}{x_i - x_k} = \left. \frac{q'}{q} \right|_{x_i} = ? \quad , \quad \sum_{k=1}^n{}' \frac{1}{(x_i - x_k)^2} = - \frac{d}{dx_i} \left( \left. \frac{q'}{q} \right|_{x_i} \right) = ? \quad .$$

Die *Cauchy-Schwarz* Ungleichung für reelle Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , mit  $a_k \equiv 1$  und  $b_k := ?$  führt dann zur Behauptung.

- b) Welche obere Schranke ergibt sich aus diesem Satz im Fall des *Hermite*-Polynomes  $H_n(x)$  für  $|x_i|$ ? Testen Sie diese Schranke für  $n = 4$ .