
Übungen, Blatt 1

1) Orthogonalität und Normierung der Legendre-Polynome

a) Zeigen Sie mittels der *Rodrigues* Formel der Legendre-Polynome $\{P_l(x)\}_0^\infty$, $x \in [-1, +1]$,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l, \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{+1} dx P_n(x) P_m(x) = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}.$$

b) Zeigen Sie, dass gilt: $P_l(1) = 1$. Was ist $P_l(-1)$?

2) Erzeugende Funktion der Legendre-Polynome

Beweisen Sie, dass für die erzeugende Funktion

$$g(z, x) = 1/\sqrt{1 - 2xz + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) z^n$$

gilt: $Q_n(x) \equiv P_n(x)$, wobei die $\{P_n(x)\}$ in Aufgabe 1 definiert sind.

Wo ist Ihnen diese erzeugende Funktion begegnet?

Hinweis: Zeigen Sie, dass $Q_n(x)$ ein Polynom vom Grad n mit $Q_n(1) \equiv 1$ ist, und die $\{Q_n(x)\}$ die von Aufgabe 1 bekannte Orthogonalitätsrelation und Normierung der $\{P_n(x)\}$ erfüllen. Reicht dies als Beweis?

3) 3-Term Rekursionsformel der Legendre-Polynome

a) Leiten Sie mit Hilfe der von Aufgabe 2 bekannten erzeugenden Funktion der Legendre-Polynome die folgende Rekursionsformel her:

$$(l+1) P_{l+1}(x) = (2l+1)x P_l(x) - l P_{l-1}(x), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad P_{-1}(x) \equiv 0, \quad P_0(x) \equiv 1.$$

b) Zeigen Sie, unter Verwendung der erzeugenden Funktion und der Rekursionsformel der Legendre-Polynome,

$$\begin{aligned} P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) &= (2l+1) P_l(x), \\ (1-x^2) P'_l(x) &= -l x P_l(x) + l P_{l-1}(x), \quad l = (0), 1, 2, \dots \end{aligned}$$

4) Minimaleigenschaft der Legendre-Polynome

Zeigen Sie, dass die monischen Legendre-Polynome $p_n(x) := 2^n (n!)^2 / (2n)! P_n(x)$ (führender Koeffizient ist 1) folgende Minimaleigenschaft besitzen:

$$\int_{-1}^{+1} dx q_n^2(x) \geq \int_{-1}^{+1} dx p_n^2(x) = ?,$$

wobei $q_n(x)$ ein beliebiges monisches, reelles Polynom vom Grad n ist. Wann gilt Gleichheit?