Übungen, Blatt 9

23) Ornstein-Uhlenbeck Diffusionsprozeß (Teil II)

Es soll die (exponentielle) erzeugende Funktion

$$g_H(x,y;z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\, H_n(y)\, \frac{z^n}{n!}$$

für die *Hermite*-Polynome berechnet werden.

a) Wie sieht die explizite Form von $H_n(x)$ aus?

b) Setzen Sie dieses explizite $H_n(x)$ in $g_H(x,y;z)$ ein, und verwenden Sie die Doppelsummenregel $DS2$ (Lösungen zu Blatt 6, S.4).

c) Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+k}(x)\, \frac{t^n}{n!} \;=\; e^{2\,x\,t - t^2}\, H_k(x-t) \;,$$

indem Sie die erzeugende Funktion

$$h_H(x;t,v) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+k}(x)\, \frac{t^n}{n!} \right) \frac{v^k}{k!}$$

berechnen. (*Cauchy*-, d.h. $DS1-$Regel anwenden.)

d) Unter Verwendung der Behauptung vom Teil **c)**, der expliziten Form von $H_{2k}(x)$ aus Teil **a)**, einer Umsummierung und der Summation einer Reihe erhält man das gesuchte Ergebnis für $g_H(x,y;z)$.

e) Wie sieht demnach die explizite Form der *Ornstein-Uhlenbeck* Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\tau,q,q')$ aus?

24) Momentendeterminante aus Koeffizienten der Rekursionsformel

a) Drücken Sie den $\tilde{D}_n-$Koeffizienten der $3-$Term Rekursionsformel eines monischen *OPS* durch die Hankel-Determinanten $\{H_k\}$ der Momente aus.

b) Finden Sie die Hankel-Determinante der Momente, H_n, als Funktion der Koeffizienten $\{\tilde{D}_i\}_0^n$ der $3-$Term Rekursionsformel eines monischen *OPS*.

25) Schranken für Nullstellen orthogonaler Polynome

Für jede Nullstelle x_i eines Polynoms $p(x) \equiv p_n(x)$ vom Grad n mit verschiedenen reellen Nullstellen gilt:

$$0 \;\leq\; \Big[3(n-2)\big(p''(x_i)\big)^2 \;-\; 4(n-1)\; p'(x_i)\; p'''(x_i)\Big] / (p'(x_i))^2 \;\; .$$

Fortsetzung der Aufgabe 26 auf Seite - 2 -

Fortsetzung zur Aufgabe 25

a) Schreiben Sie zum Beweis $p(x) \;=\; (x - x_i)\; q(x)$, und zeigen Sie zunächst für die m-te Ableitung: $p^{(m)}(x_i) \;=\; m q^{(m-1)}(x_i)$. Berechen Sie dann die Summen (der Strich deutet an, dass der singuläre Summand weggelassen werden soll):

$$\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{1}{x_i - x_k} \;=\; \frac{q'}{q}\bigg|_{x_i} = ? \quad , \quad \sum_{k=1}^{n}{}' \frac{1}{(x_i - x_k)^2} \;=\; -\frac{d}{dx_i}\bigg(\frac{q'}{q}\bigg|_{x_i}\bigg) = ? \; .$$

Die *Cauchy-Schwarz* Ungleichung für reelle Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, mit $a_k \equiv 1$ und $b_k := ?$ führt dann zur Behauptung.

b) Welche obere Schranke ergibt sich aus diesem Satz im Fall des *Hermite*-Polynomes $H_n(x)$ für $|x_i|$? Testen Sie diese Schranke für $n = 4$.