Universität Karlsruhe **Institut für Theoretische Physik**
Supersymmetrische Quantenmechanik **Sommersemester 2007**

Übungen, Blatt 1

---

1) *Bose*- und *Fermi*-Oszillatoren

Der Erzeugungsoperator $\mathbf{a}^+$ und der Vernichtungsoperator $\mathbf{a}$ eines *Bose*-Oszillators erfüllt die Kommutatorrelation ($\hbar = 1$)

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] = \mathbf{1} \; .$$

Der Erzeugungsoperator $\mathbf{d}^+$ und der Vernichtungsoperator $\mathbf{d}$ eines *Fermi*-‚Oszillators' erfüllt die Antikommutatorrelationen

$$\{\mathbf{d}, \mathbf{d}^+\} = \mathbf{1} \quad , \quad \{\mathbf{d}, \mathbf{d}\} = \mathbf{0} = \{\mathbf{d}^+, \mathbf{d}^+\} \; .$$

a) 1. Zeigen Sie durch Spurbildung, dass es im *Bose*fall keine endlichdimensionale Matrixdarstellung für $\mathbf{a}^+$ und $\mathbf{a}$ geben kann.

2. Wie sieht die Matrixdarstellung für $\mathbf{a}^+$, $\mathbf{a}$ und $\mathbf{N}_B \equiv \mathbf{a}^+\mathbf{a}$ in der Basis $|n> =$ Spaltenvektor mit Eintrag 1 an der n-ten Stelle aus?

3. Wie sind die kohärenten Zustände $|\, z >$ definiert? Geben Sie diese normierten Zustände an.

4. Geben Sie einen unitären Operator $\mathbf{D}(z)$ an, so dass gilt: $\mathbf{D}(z)|0> = |z>$. Was ergibt sich für $[\mathbf{D}(z), \mathbf{a}]$ und $[\mathbf{D}(z), \mathbf{a}^+]$?

5. Berechnen Sie die Schwankungsquadrate $(\triangle \mathbf{q})^2$ und $(\triangle \mathbf{p})^2$ für einen kohärenten Zustand $|z>$.

b) 1. Geben Sie eine Matrixdarstellung der *Fermi*operatoren $\mathbf{d}^+$, $\mathbf{d}$ und der *Bose*-Operatoren $\mathbf{N}_F \equiv \mathbf{d}^+\mathbf{d}$ und $\mathbf{H}_F = \frac{1}{2}[\mathbf{d}^+, \mathbf{d}]$ in der Basis $|1 > \doteq \binom{1}{0}$, $|0 > \doteq \binom{0}{1}$ an.

2. Definieren Sie, anolog zum *Bose*-Fall, normierte „kohärente Zustände"$|\zeta>$. Verwenden Sie den Ansatz $|\zeta> = c_0|0> + \xi_1|1>$. Dabei ist c_0 eine kommutierende Zahl und ξ_1 ist eine *Grassmann*-Variable, d.h. $\xi_1^2 = 0$ und ξ_1 antivertauscht mit fermionischen Operatoren und vertauscht mit c_0.
Zeigen Sie dass gilt: $|\zeta> = c_0 \, exp(\mathbf{d}^+\zeta) \; |0>$ mit geeignet definierter *Grassmann*-Variable ζ. Bestimmen Sie $|c_0|$ aus der Normierungsbedingung $<\zeta|\zeta> = 1$.