
Übungen, Blatt 13

---

23) *Graßmann*-Integrale

a) Berechnen Sie das Mehrfachintegral

$$\prod_{k=1}^{N} \left(\int d\bar{\eta}_k \, d\eta_k\right) exp(-\eta \, \mathbf{A} \, \bar{\eta}) \quad .$$

Hinweis: Benutzen Sie eine Variablensubstitution und eine analoge Formel zu der in Aufgabe **22 b)**, Blatt 12.

b) Verwenden Sie Translationsinvarianz, um das folgende Integral zu bestimmen: ($\mathbf{A}$ sei invertierbar.)

$$\prod_{k=1}^{N} \left(\int d\bar{\eta}_k \, d\eta_k\right) exp(-\eta \, \mathbf{A} \, \bar{\eta} \, - \, \eta \, \bar{c} \, - \, c \, \bar{\eta}) \quad .$$

24) Antikommutierende Quadratische Form (*Pfaff*sche Determinante)

Betrachten Sie die antisymmetrische quadratische Form $A(\eta) \;:=\; \sum_{i,j=1}^{2n} \eta_i \, A^{i,j} \, \eta_j$ mit $N = 2n$ antikommutierenden Variablen η_i und antisymmetrischer Matrix $\mathbf{A}$ mit kommutierenden Elementen.

a) Berechnen Sie $Pf(\mathbf{A}) := \int d\eta_{2n} \cdots \int d\eta_1 \, exp(\frac{1}{2} A(\eta))$.

b) Was ergibt sich für $Pf(\mathbf{A})$ für ungerades N ?

c) Aus wievielen nichtäquivalenten Termen besteht $Pf(\mathbf{A})$?
Schreiben Sie diese Terme für die Fälle $n = 1, 2, 3$ auf.

d) Beweisen Sie mittels einer Variablensubstitution $\eta_j = (\xi_j + i\rho_j)/\sqrt{2}$ (und k.K., mit reellen ξ und ρ) im Integral für $Det\,\mathbf{A}$ einer $2n \times 2n$ antisymmetrischen Matrix $\mathbf{A}$ (Vgl. Aufgabe **23 a)**) die Identität

$$(Pf(\mathbf{A}))^2 \;=\; Det\,\mathbf{A} \; .$$

25) Kern eines Transferoperators ($2D$ *Ising*-Modell)

a) Zeigen Sie, dass $\tilde{\mathbf{\Theta}}(\tilde{K}_1) = exp(-2\tilde{K}_1 \sum_{x=0}^{M-1} (\mathbf{d}_x^+ \, \mathbf{d}_x - \frac{1}{2}\mathbf{1}))$ wie folgt geschrieben werden kann:

$$\tilde{\mathbf{\Theta}} = \prod_{x=0}^{M-1} \left(e^{\tilde{K}_1} \, \mathbf{1} - (2 \, sinh \, \tilde{K}_1) \, \mathbf{d}_x^+ \, \mathbf{d}_x\right).$$

b) Schreiben Sie das Normalsymbol $K_{\tilde{\mathbf{\Theta}}}(\eta, \bar{\eta}')$ auf. Wie sieht also der Kern $A_{\tilde{\mathbf{\Theta}}}(\eta, \bar{\eta}')$ von $\tilde{\mathbf{\Theta}}$ aus?