Übungen, Blatt 10

16) *Pöschl-Teller* 1: Exaktes und sWKB-Spektrum

Betrachten Sie das Susy-Potential $\Phi(q; A, B) = A\,tan(q) - B\,cot(q)$ mit $q \in (0, \pi/2)$ und $A, B > 0$.

a) Schreiben Sie die Partnerpotentiale $V_-(q; A, B)$ und $V_+(q; A, B)$ auf, und zeigen Sie, dass sie gestaltgleich sind. Wie sind dabei die Parameter A und B zu transformieren? Wie sieht der Rest $R(A, B)$ aus?

b) Berechnen Sie die diskreten (dimensionslosen) Energieeigenwerte $\epsilon_n^-(A, B)$ von $H_-(A, B) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dq^2} + V_-(q; A, B)$.

Wie sieht das diskrete Spektrum $\epsilon_n(a, b)$ von $H(q; a, b) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dq^2} + V(q; a, b)$ mit $V(q; a, b) = a/(sin(q))^2 + b/(cos(q))^2, \;\; q \in (0, \pi/2), \;\; a, b > 0$ aus?

c) Berechnen Sie den (normierten) Grundzustand von $H_-(q; A, B)$.
Schreiben Sie die Formel für die Eigenfunktionen $\Psi_n^-(q; A, B)$ von $H_-(q; A, B)$ auf.

d) Berechnen Sie die diskreten Energieeigenwerte von $H(q; a, b)$ mittels der supersymmetrischen Variante der *WKB*-Formel. Nennen Sie sie $\epsilon_n^{sWKB}(a, b)$.
Testen Sie damit den allgemeinen Sachverhalt für gestaltinvariante Potentiale bei denen die Parameter nur verschoben werden.

e) Berechnen Sie das diskrete Spektrum von $H(q; a, b)$ mittels der gewöhnlichen *WKB*-Formel. Nennen Sie es $\epsilon_n^{WKB}(a, b)$.
Vergleichen Sie dieses Resultat mit den beiden anderen.

17) *sWKB*-Näherungsbedingung

a) Leiten Sie für die Partnerpotentiale $V_\pm(x) = \frac{1}{2}(\Phi^2(x) \pm \frac{\hbar}{\sqrt{m}}\Phi'(x))$ die Bedingung dafür her, dass die supersymmetrische Version der *WKB*-Näherung gilt.
Hinweis: Bei dieser Version der *WKB*-Näherung wird angenommen, dass $\Phi(x)$ von der Ordnung $\hbar^0$ ist. (Obwohl i.a. $\Phi(x)$ auch $\hbar$ enthält.)

b) Versuchen Sie aus der gefundenen Bedingung den Abstand $|x - x_0|$ von einem klassischen Umkehrpunkt $x_0 = x_0(E)$ abzuschätzen, bis zu dem die *sWKB*-Näherung ungültig ist.
Ein Umkehrpunkt wird aus $\Phi^2(x_0) = 2\,E$ bestimmt.