

Übungen, Blatt 13

23) *Graßmann-Integrale*

a) Berechnen Sie das Mehrfachintegral

$$\prod_{k=1}^N (\int d\bar{\eta}_k d\eta_k) \exp(-\eta \mathbf{A} \bar{\eta}) .$$

Hinweis: Benutzen Sie eine Variablensubstitution und eine analoge Formel zu der in Aufgabe **22 b)**, Blatt 12.

b) Verwenden Sie Translationsinvarianz, um das folgende Integral zu bestimmen: (\mathbf{A} sei invertierbar.)

$$\prod_{k=1}^N (\int d\bar{\eta}_k d\eta_k) \exp(-\eta \mathbf{A} \bar{\eta} - \eta \bar{c} - c \bar{\eta}) .$$

24) Antikommutierende Quadratische Form (*Pfaffsche Determinante*)

Betrachten Sie die antisymmetrische quadratische Form $A(\eta) := \sum_{i,j=1}^{2n} \eta_i A^{i,j} \eta_j$ mit $N = 2n$ antikommutierenden Variablen η_i und antisymmetrischer Matrix \mathbf{A} mit kommutierenden Elementen.

a) Berechnen Sie $Pf(\mathbf{A}) := \int d\eta_{2n} \cdots \int d\eta_1 \exp(\frac{1}{2}A(\eta))$.

b) Was ergibt sich für $Pf(\mathbf{A})$ für ungerades N ?

c) Aus wievielen nichtäquivalenten Termen besteht $Pf(\mathbf{A})$?

Schreiben Sie diese Terme für die Fälle $n = 1, 2, 3$ auf.

d) Beweisen Sie mittels einer Variablensubstitution $\eta_j = (\xi_j + i\rho_j)/\sqrt{2}$ (und k.K., mit reellen ξ und ρ) im Integral für $Det \mathbf{A}$ einer $2n \times 2n$ antisymmetrischen Matrix \mathbf{A} (Vgl. Aufgabe **23 a)**) die Identität

$$(Pf(\mathbf{A}))^2 = Det \mathbf{A} .$$

25) Kern eines Transferoperators (*2D Ising-Modell*)

a) Zeigen Sie, dass $\tilde{\Theta}(\tilde{K}_1) = \exp(-2\tilde{K}_1 \sum_{x=0}^{M-1} (\mathbf{d}_x^+ \mathbf{d}_x - \frac{1}{2}\mathbf{1}))$ wie folgt geschrieben werden kann:

$$\tilde{\Theta} = \prod_{x=0}^{M-1} (e^{\tilde{K}_1} \mathbf{1} - (2 \sinh \tilde{K}_1) \mathbf{d}_x^+ \mathbf{d}_x).$$

b) Schreiben Sie das Normalsymbol $K_{\tilde{\Theta}}(\eta, \bar{\eta}')$ auf. Wie sieht also der Kern $A_{\tilde{\Theta}}(\eta, \bar{\eta}')$ von $\tilde{\Theta}$ aus?