Übungen, Blatt 3

3) *Pauli-Hamilton*operator ($N = 1$ supersymmetrische Quantenmechanik)

Betrachten Sie für ein Teilchen im Magnetfeld $\vec{B}$ mit Masse m, Ladung e und gyromagnetischem Faktor g den *Pauli-Hamilton*operator

$$\mathbf{H}_P \;=\; \frac{1}{2m}\,(\vec{\mathbf{p}} - e\vec{\mathbf{A}})^2\;\mathbf{1}_2 \;-\; g\mu_B\,\vec{\mathbf{B}}\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\;,$$

mit $\mu_B \equiv e\hbar/(2m)$ und $\mathbf{B}^k \;=\; \frac{i}{\hbar}\,\varepsilon^{klm}[\mathbf{p}_l, \mathbf{A}_m] \;= ?$.

a) Suchen Sie einen hermiteschen Operator $\mathbf{Q}$, so dass gilt: $\mathbf{H}_P \;=\; \mathbf{Q}^2$. Welchen Wert muß g dazu haben?
Hinweis: Versuchen Sie es mit dem Ansatz $\mathbf{Q} \;=\; \vec{\mathbf{Q}}\cdot\vec{\boldsymbol{\sigma}}$. Ist das der allgemeine Fall?

b) Zeigen Sie, dass das gefundene $\mathbf{Q}$ eine Erhaltungsgröße ist.

c) Gibt es für beliebige Vektorpotentiale $\vec{\mathbf{A}}$ einen hermiteschen, von $\mathbf{q}$ und $\mathbf{p}$ unabhängigen Operator $\mathbf{W}$ mit $\{\mathbf{Q}, \mathbf{W}\} \;=\; \mathbf{0}$ und $\mathbf{W}^2 \;=\; \mathbf{1}$?

4) Zeigen Sie mittels der *Baker-Campbell-Hausdorff* Formel und der Supersymmetriealgebra , dass die Elemente $\mathbf{g}(\xi, \overline{\xi}, c) \equiv exp\; i(\xi\mathbf{Q} \;+\; \mathbf{Q}^+\overline{\xi} \;+\; c\mathbf{H})$ das Multiplikationsgesetz $\mathbf{g}(\xi, \overline{\xi}, c)\;\mathbf{g}(\xi', \overline{\xi}', c') \;=\; \mathbf{g}(\xi'', \overline{\xi}'', c'')$ erfüllen. Geben Sie ξ'', $\overline{\xi}''$ und c'' als Funktion der $\xi, \overline{\xi}, c$ und $\xi', \overline{\xi}', c'$ an.
Ist diese Multiplikation kommutativ? Ist sie assoziativ? Gibt es ein Einselement $\mathbf{e}$? Gibt es ein Inverses zu $\mathbf{g}$?
Hinweis: ξ,$\overline{\xi}$ sind anti-kommutierende Parameter und c ist kommutierend.

5) Super-Algebren und *Jacobi*-Identitäten

Eine Super-Algebra (graduierte *Lie*-Algebra) verwendet die Klammer:

$$[A, B\} \;=\; C \qquad\qquad \text{mit } [A, B\} := AB \;-(-1)^{ba}BA\;,$$

und $a = g(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ bosonisch} \\ 1 & \text{falls } A \text{ fermionisch} \end{cases}$. Analoges gilt für $b = b(B)$.

$g(C) = g([A, B\}) := a \;+\; b\;(mod\;2)$ ($\mathbf{Z}_2$ Graduierung).

a) In welcher Relation steht $[A, B\}$ mit $[B, A\}$?

b) Zeigen Sie die (graduierte) *Jacobi*-Identität:

$$\circlearrowleft\!\!\!\!\sum\; [[A, B], C] \;:=\; [[A, B\}, C\} \;+\; (-1)^{(b+c)a}[[B, C\}, A\} \;+\; (-1)^{c(a+b)}[[C, A\}, B\} \equiv 0\;,$$

indem Sie alle vier Fälle, $\mathcal{BBB}$, $\mathcal{FBB}$, $\mathcal{FFB}$ und $\mathcal{FFF}$ ($\mathcal{B}$ für einen bosonischen und $\mathcal{F}$ für einen fermionischen Operator) betrachten.

c) Prüfen Sie, ob im Falle der $N = 2$ Superalgebra der supersymmetrischen Quantenmechanik, d. h. für

$$\{\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^+\} \;=\; 2\mathbf{H}\;\;,\;\; \{\mathbf{Q}, \mathbf{Q}\} \;=\; \mathbf{0} \;=\; \{\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^+\}\;\;,\;\; [\mathbf{H}, \mathbf{Q}] \;=\; \mathbf{0} \;=\; [\mathbf{H}, \mathbf{Q}^+]\;\;,$$

diese *Jacobi*-Identitäten erfüllt sind.