Universität Karlsruhe **Institut für Theoretische Physik**
Supersymmetrie I **Wintersemester 2005/'06**

Übungen, Blatt 1

---

1) *Bose*- und *Fermi*-Oszillatoren

Der Erzeugungsoperator $\mathbf{a}^+$ und der Vernichtungsoperator $\mathbf{a}$ eines *Bose*-Oszillators erfüllt die Kommutatorrelation ($\hbar = 1$)

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] = \mathbf{1} .$$

Der Erzeugungsoperator $\mathbf{d}^+$ und der Vernichtungsoperator $\mathbf{d}$ eines *Fermi*-‚Oszillators' erfüllt die Antikommutatorrelationen

$$\{\mathbf{d}, \mathbf{d}^+\} = \mathbf{1} \quad , \quad \{\mathbf{d}, \mathbf{d}\} = \mathbf{0} = \{\mathbf{d}^+, \mathbf{d}^+\} \quad .$$

a) 1. Zeigen Sie durch Spurbildung, dass es im *Bose*fall keine endlichdimensionale Matrixdarstellung für $\mathbf{a}^+$ und $\mathbf{a}$ geben kann.

2. Wie sieht die Matrixdarstellung für $\mathbf{a}^+$, $\mathbf{a}$ und $\mathbf{N}_B \equiv \mathbf{a}^+\mathbf{a}$ in der Basis $|n>=$ Spaltenvektor mit Eintrag 1 an der n-ten Stelle aus?

3. Wie sind die kohärenten Zustände $|\,z>$ definiert? Geben Sie diese normierten Zustände an.

4. Geben Sie einen unitären Operator $\mathbf{D}(z)$ an, so dass gilt: $\mathbf{D}(z)|0>= |z>$. Was ergibt sich für $[\mathbf{D}(z), \mathbf{a}]$ und $[\mathbf{D}(z), \mathbf{a}^+]$?

5. Berechnen Sie die Schwankungsquadrate $(\triangle\mathbf{q})^2$ und $(\triangle\mathbf{p})^2$ für einen kohärenten Zustand $|z>$.

b) 1. Geben Sie eine Matrixdarstellung der *Fermi*operatoren $\mathbf{d}^+$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{N}_F \equiv \mathbf{d}^+\mathbf{d}$ und $\mathbf{H}_F = \frac{1}{2}[\mathbf{d}^+, \mathbf{d}]$ in der Basis $|1>\doteq \binom{1}{0}$, $|0>\doteq \binom{0}{1}$ an.

2. Definieren Sie, anolog zum *Bose*-Fall, normierte „kohärente Zustände"$|\zeta>$. Verwenden Sie den Ansatz $|\zeta>= c_0|0> + \xi_1|1>$. Dabei sei c_0 eine kommutierende Zahl und ξ_1 ist eine *Grassmann*-Variable, d.h. $\xi_1^2 = 0$, und ξ_1 antivertauscht mit fermionischen Operatoren und vertauscht mit c_0. Von welchem Typ ist ζ? Zeigen Sie dass gilt: $|\zeta>= c_0\, exp(\mathbf{d}^+\zeta)\,|0>$ mit geeignet definierter *Grassmann*-Variable ζ. Bestimmen Sie $|c_0|$ aus der Normierungsbedingung $<\zeta|\zeta>= 1$. Wieso kann c_0 keine komplexe Zahl sein?

2) $N = 2$ Super-*Lie*-Algebra der supersymmetrischen Quantenmechanik

a) Schreiben Sie die Super-*Lie*-Algebra

$$\{\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^+\} = 2\,\mathbf{H} \quad , \quad \{\mathbf{Q}, \mathbf{Q}\} = \mathbf{0} = \{\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^+\} \quad , \quad [\mathbf{H}, \mathbf{Q}] = \mathbf{0} = [\mathbf{H}, \mathbf{Q}^+]$$

für die hermiteschen Operatoren $\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^+)$ und $\mathbf{Q}_2 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^+)$ auf.

b) Welche lineare Transformation $\mathbf{Q}_i{}' = A_i{}^j\,\mathbf{Q}_j$, $i, j \in \{1, 2\}$, $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$, führt diese $N = 2$ Super-*Lie*-Algebra in sich über?