

Übungen, Blatt 14

38) Cartan-Killing Form und adjungierte Darstellung

Eine Liealgebra \mathfrak{g} mit hermiteschen Generatoren T_r , $r = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$ habe die (reellen) Strukturkonstanten $c_{rs}{}^t: [T_r, T_s] = ic_{rs}{}^t T_t$. Die Cartan-Killing Form (auch Cartan-Metrik genannt) ist (bis auf einen positiven Faktor) $g_{rs} := c_{ru}{}^t c_{st}{}^u$. Für halbeinfache Liealgebren ist $\text{Det } g \neq 0$, und für halbeinfache kompakte Liealgebren ist g negativ definit. Solche Liealgebren werden im Folgenden betrachtet.

- a) Testen Sie am Beispiel der Liealgebra $su(2)$ (auch A_1 genannt) dass g_{rs} negativ definit ist.
- b) Zeigen Sie mittels der Jacobi-Identität, dass $c_{rst} := c_{rs}{}^u g_{ut}$ total antisymmetrisch ist.
- c) Zeigen Sie, dass durch geeignete Basiswahl $g_{rs} = -\kappa \delta_{rs}$ mit $\kappa > 0$ erreicht werden kann.
- d) Überprüfen Sie, dass $(T_r^{adj})_s{}^t := -i c_{rs}{}^t$ eine Darstellung der Liealgebra ist (adjungierte Darstellung).

Zeigen Sie: $Sp(T_r^{adj} T_s^{adj}) = -g_{rs}$. Also kann man annehmen, dass

$Sp(T_r^{adj} T_s^{adj}) = \kappa \delta_{rs}$ gilt.

39) Infinitesimale Eichtransformation von $V(z)$ im nichtabelschen Fall

Die endliche Eichtransformation des reellen Vektorsuperfeldes $V(z)$ ist im nichtabelschen Fall in Matrixschreibweise gegeben durch: $(\exp \mathbf{V})' = \exp(-i\mathbf{\Lambda}^+) \exp \mathbf{V} \exp(+i\mathbf{\Lambda})$ mit chiralem, bzw. antichiralem $\mathbf{\Lambda}$, bzw. $\mathbf{\Lambda}^+$.

- a) Schreiben Sie in erster Ordnung der Eichsuperfelder $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Lambda}^+$ die Variation $\delta e^{\mathbf{V}}$ auf.
- b) Variieren Sie die Identität $[\mathbf{V}, e^{\mathbf{V}}] = 0$, und schreiben Sie damit

$$e^{-\mathbf{V}/2} \delta \mathbf{V} e^{+\mathbf{V}/2} - e^{+\mathbf{V}/2} \delta \mathbf{V} e^{-\mathbf{V}/2}$$

auf.

- c) Verwenden Sie die Identität $e^{\mathbf{W}} \mathbf{X} e^{-\mathbf{W}} = (\exp \mathbf{L}_W) \mathbf{X}$, mit

$$(\mathbf{L}_W)^n \mathbf{X} := [\mathbf{W}, [\mathbf{W}, [\mathbf{W}, \dots [\mathbf{W}, \mathbf{X}] \dots]],$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ mal}}$

um den Ausdruck vom Teil b) umzuschreiben.

- d) Zeigen Sie damit die Formel:

$$\delta \mathbf{V} = \frac{i}{2} \mathbf{L}_V \left[\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^+ + \coth\left(\frac{1}{2} \mathbf{L}_V\right) (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}^+) \right].$$

- e) Schreiben Sie die ersten Terme in der Entwicklung der Formel vom Teil d) auf.