Übungen, Blatt 9

21) Bewegungsumkehr (Zeitspiegelung $\mathbf{T}$)

Unter einer $\boldsymbol{\tau}-$Transformation verhält sich ein *Dirac*spinorfeld $\Psi(x)$ wie folgt:
$\Psi'(x') \;=\; \boldsymbol{\tau}\,\Psi(x) \;=\; \mathbf{T}\,\Psi^*(x)$ mit $x'^a \;=\; (-1)^{V(a)+1}x^a\;, V(0)=0,\;\; V(i)=1, i=1,2,3\;.$
$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}\;\mathbf{K}$. $\mathbf{K}$ bedeutet komplex Konjugieren, und $\mathbf{T}$ ist als 4×4 Matrix unitär.

- **a)** Welche Bedingung an $\mathbf{T}$ erhält man aus der Invarianzforderung der *Dirac*gleichung unter der $\boldsymbol{\tau}$ Transformation?
- **b)** Bestimmen Sie in 2-Komponentennotation eine blockdiagonale $\mathbf{T}$ Matrix, welche die in Teil **a)** gefundene Bedingung erfüllt.
  Gilt $\mathbf{T}^{-1} = -\mathbf{T}^*$?
  Ist die 4×4 Matrix $\mathbf{T}$ unitär?
- **c)** Schreiben Sie die $\boldsymbol{\tau}-$Transformation der *Weyl*spinoren $\psi_\alpha(x)$ und $\bar{\chi}^{\dot\alpha}(x)$ auf.
  Was ergibt sich im Fall eines *Majorana*spinors?
- **d)** Zeigen Sie: $\boldsymbol{\tau}^2\,\Psi(x) \;=\; -\Psi(x)$. Dann ist mit Ψ auch $\boldsymbol{\tau}\,\Psi$ ein Eigenzustand zu $\mathbf{H}$, der nicht proportional zu Ψ ist (*Kramers*-Entartung).

22) Zur Vertauschung von Translationen mit Supersymmetrietransformationen

Schreiben Sie die Struktur des Kommutators $[\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}^B_\beta]$ auf, die mit den Indizes, der Graduierung und der Abwesenheit von Spin 3/2 Generatoren verträglich ist. Nennen Sie die auftretenden Matrixelemente c^{BD}.

- **a)** Wie sieht der Kommutator $[\mathbf{P}_a, \bar{\mathbf{Q}}_{\dot\beta B}]$ aus?
- **b)** Benützen Sie die $\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}^A_\alpha, \mathbf{P}_c$ *Jacobi*-Identität, um zu zeigen: $c^{BC}c^*{}_{CD} \;=\; 0$.
- **c)** Schreiben Sie die $\mathbf{Q}^A_\alpha,\; \mathbf{Q}^B_\beta,\; \mathbf{P}_c$ *Jacobi*-Identität auf. Verwenden Sie dabei $[\mathbf{Z}^{AB}, \mathbf{P}_a] \;=\; \mathbf{0}$. Zeigen Sie, dass aus ihrem anti-symmetrischen Teil in α,β folgt: $c^{AB} \;=\; c^{BA}$.
- **d)** Folgern Sie aus der gefundenen Matrixgleichung $\mathbf{c}\,\mathbf{c}^+ \;=\; \mathbf{0}$, dass bereits $c^{AB} \;=\; 0$ gelten muss.

23) Zentrale Ladungen

Um zu beweisen, dass die Generatoren $\mathbf{Z}^{AB}$ sowohl mit den Supersymmetriegeneratoren $\mathbf{Q}$ und $\bar{\mathbf{Q}}$ als auch mit sich selbst vertauschen,

- **a)** zeigen Sie zuerst, dass die $\mathbf{Z}^{AB} = -\mathbf{Z}^{BA}$ eine invariante Unter-*Lie*algebra der inneren Symmetriealgebra $[\mathbf{T}_r, \mathbf{T}_s] \;=\; i\,c_{rs}{}^{t}\;\mathbf{T}_t$ bilden. (D.h. die Struktur ist $[\mathbf{T}, \mathbf{Z}] \propto \mathbf{Z}$, $[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}] \propto \mathbf{Z}$.)
- **b)** Welche *Jacobi*-Identität drückt $[\mathbf{Z}^{AB}, \bar{\mathbf{Q}}_{\dot\gamma C}]$ durch $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ Kommutatoren (die nach Aufgabe **22)** verschwinden) aus?
- **c)** Warum folgt $[\mathbf{Z}^{AB}, \mathbf{Z}^{CD}] \;=\; \mathbf{0}$ aus $[\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Q}}] \;=\; \mathbf{0}$? (Also bilden die $\mathbf{Z}$ eine invariante *abelsche* Unter-*Lie*algebra der $\mathbf{T}$ *Lie*algebra.) Außerdem folgt $[\mathbf{Z}, \mathbf{Q}] \;=\; \mathbf{0}$.
- **d)** Da die innere Symmetriealgebra nach *Coleman-Mandula* vom Typ kompakte, halbeinfache Liealgebra $\oplus$ abelsche Summanden ist, liegen wegen Teil **c)** die $\mathbf{Z}$ Generatoren im abelschen Summanden, also gilt mit Teil **a)** $[\mathbf{T}_r, \mathbf{Z}^{AB}] \;=\; \mathbf{0}$.