
Übungen, Blatt 1

1) *Bose-* und *Fermi-Oszillatoren*

Der Erzeugungsoperator \mathbf{a}^+ und der Vernichtungsoperator \mathbf{a} eines *Bose-Oszillators* erfüllt die Kommutatorrelation ($\hbar = 1$)

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] = \mathbf{1} .$$

Der Erzeugungsoperator \mathbf{d}^+ und der Vernichtungsoperator \mathbf{d} eines *Fermi-Oszillators* erfüllt die Antikommutatorrelationen

$$\{\mathbf{d}, \mathbf{d}^+\} = \mathbf{1} \quad , \quad \{\mathbf{d}, \mathbf{d}\} = \mathbf{0} = \{\mathbf{d}^+, \mathbf{d}^+\} .$$

- a) 1. Zeigen Sie durch Spurbildung, dass es im *Bosefall* keine endlichdimensionale Matrixdarstellung für \mathbf{a}^+ und \mathbf{a} geben kann.
2. Wie sieht die Matrixdarstellung für \mathbf{a}^+ , \mathbf{a} und $\mathbf{N}_B \equiv \mathbf{a}^+ \mathbf{a}$ in der Basis $|n\rangle =$ Spaltenvektor mit Eintrag 1 an der n -ten Stelle aus?
3. Wie sind die kohärenten Zustände $|z\rangle$ definiert? Geben Sie diese normierten Zustände an.
4. Geben Sie einen unitären Operator $\mathbf{D}(z, \bar{z})$ an, so dass gilt: $\mathbf{D}(z, \bar{z})|0\rangle = |z\rangle$. Was ergibt sich für $[\mathbf{D}(z, \bar{z}), \mathbf{a}]$ und $[\mathbf{D}(z, \bar{z}), \mathbf{a}^+]$?
5. Berechnen Sie die Schwankungsquadrate $(\Delta \mathbf{q})^2$ und $(\Delta \mathbf{p})^2$ für einen kohärenten Zustand $|z\rangle$.
- b) 1. Geben Sie eine Matrixdarstellung der *Fermioperatoren* \mathbf{d}^+ , \mathbf{d} und der *Bose-Operatoren* $\mathbf{N}_F \equiv \mathbf{d}^+ \mathbf{d}$ und $\mathbf{H}_F = \frac{1}{2}[\mathbf{d}^+, \mathbf{d}]$ in der Basis $|1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|0\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.
2. Definieren Sie, analog zum *Bose-Fall*, normierte „kohärente Zustände“ $|\zeta\rangle$. Verwenden Sie den Ansatz $|\zeta\rangle = c_0|0\rangle + \xi_1|1\rangle$. Dabei ist c_0 eine kommutierende Zahl und ξ_1 ist eine *Grassmann-Variable*, d.h. $\xi_1^2 = 0$ und ξ_1 antivertauscht mit fermionischen Operatoren und vertauscht mit c_0 . Zeigen Sie dass gilt: $|\zeta\rangle = c_0 \exp(\mathbf{d}^+ \zeta) |0\rangle$ mit geeignet definierter *Grassmann-Variable* ζ . Bestimmen Sie $|c_0|$ aus der Normierungsbedingung $\langle \zeta | \zeta \rangle = 1$.