Übungen, Blatt 14

38) *Cartan-Killing* Form und adjungierte Darstellung

Eine *Lie*algebra **g** mit hermiteschen Generatoren T_r, $r = 1, ..., dim$ **g** habe die (reellen) Strukturkonstanten ${c_{rs}}^t$: $[T_r, T_s] \; = \; i{c_{rs}}^t \; T_t$. Die *Cartan-Killing* Form (auch *Cartan-*Metrik genannt) ist (bis auf einen positiven Faktor) $g_{rs} := {c_{ru}}^t \; {c_{st}}^u$. Für halbeinfache *Lie*algebren ist $Det \; g \neq 0$, und für halbeinfache kompakte *Lie*algebren ist g negativ definit. Solche *Lie*algebren werden im Folgenden betrachtet.

a) Testen Sie am Beispiel der *Lie*algebra $su(2)$ (auch A_1 genannt) dass g_{rs} negativ definit ist.

b) Zeigen Sie mittels der *Jacobi*-Identität, dass $c_{rst} := {c_{rs}}^u \; g_{ut}$ total antisymmetrisch ist.

c) Zeigen Sie, dass durch geeignete Basiswahl $g_{rs} = -\kappa \; \delta_{rs}$ mit $\kappa > 0$ erreicht werden kann.

d) Überprüfen Sie, dass ${(T_r^{\rm ad})^t}_s := i \; {c_{rs}}^t$ eine Darstellung der *Lie*algebra ist.
Adjungierte Darstellung: $ad_X \, Y \; = \; [X, Y] \; = \; Z$. Mit $X \; = \; X^r \, T_r$, etc. folgt:
$Z^t \; = \; X^r \, {(T_r^{\rm ad})^t}_s \, Y^s$.
Zeigen Sie: $Sp \; (T_r^{\rm ad} \; T_s^{\rm ad}) \; = \; -g_{rs}$. Also kann man annehmen, dass
$Sp \; (T_r^{\rm ad} \; T_s^{\rm ad}) = \kappa \; \delta_{rs}$ gilt.

39) Infinitesimale Eichtransformation von $V(z)$ im nichtabelschen Fall

Die endliche Eichtransformation des reellen Vektorsuperfeldes $V(z)$ ist im nichtabelschen Fall in Matrixschreibweise gegeben durch: $(exp \; \mathbf{V})' \; = \; exp(-i\mathbf{\Lambda}^+) \; exp \; \mathbf{V} \; exp(+i\mathbf{\Lambda})$ mit chiralem, bzw. antichiralem $\mathbf{\Lambda}$, bzw. $\mathbf{\Lambda}^+$.

a) Schreiben Sie in erster Ordnung der Eichsuperfelder $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Lambda}^+$ die Variation $\delta e^{\mathbf{V}}$ auf.

b) Variieren Sie die Identität $[\mathbf{V}, e^{\mathbf{V}}] \; = \; 0$, und schreiben Sie damit

$$e^{-\mathbf{V}/2} \; \delta\mathbf{V} \; e^{+\mathbf{V}/2} \; - \; e^{+\mathbf{V}/2} \; \delta\mathbf{V} \; e^{-\mathbf{V}/2}$$

auf.

c) Verwenden Sie die Identität $e^{\mathbf{W}} \; \mathbf{X} \; e^{-\mathbf{W}} \; = \; (exp \; \mathbf{L}_W) \, \mathbf{X}$, mit

$$(\mathbf{L}_W)^n \, \mathbf{X} := [\mathbf{W}, [\mathbf{W}, [\mathbf{W}, ...[\mathbf{W}, \mathbf{X}\underbrace{] \; ... \;]}_{n \; mal},$$

um den Ausdruck vom Teil**b)** umzuschreiben.

d) Zeigen Sie damit die Formel:

$$\delta\mathbf{V} \; = \; \frac{i}{2}\mathbf{L}_V \Big[\mathbf{\Lambda} \; + \; \mathbf{\Lambda}^+ \; + \; coth(\frac{1}{2}\mathbf{L}_V)(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}^+)\Big] \quad .$$

e) Schreiben Sie die ersten Terme in der Entwicklung der Formel vom Teil **d)** auf.