Universität Karlsruhe | **Institut für Theoretische Physik**
Supersymmetrie I | **Wintersemester 2007/'08**

Übungen, Blatt 9

---

21) Bewegungsumkehr (Zeitspiegelung $\mathbf{T}$)

Unter einer $\boldsymbol{\tau}-$Transformation verhält sich ein *Dirac*spinorfeld $\Psi(x)$ wie folgt:

$\Psi'(x') = \boldsymbol{\tau}\,\Psi(x) = \mathbf{T}\,\Psi^*(x)$ mit $x'^a = (-1)^{V(a)+1}x^a$,$V(0)=0,\ V(i)=1, i=1,2,3$.

$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}\ \mathbf{K}$. $\mathbf{K}$ bedeutet komplex Konjugieren, und $\mathbf{T}$ ist als 4×4 Matrix unitär.

a) Welche Bedingung an $\mathbf{T}$ erhält man aus der Invarianzforderung der *Dirac*gleichung unter der $\boldsymbol{\tau}$ Transformation?

b) Bestimmen Sie in 2-Komponentennotation eine blockdiagonale $\mathbf{T}$ Matrix, welche die in Teil **a)** gefundene Bedingung erfüllt.
Gilt $\mathbf{T}^{-1} = -\mathbf{T}^*$?
Ist die 4×4 Matrix $\mathbf{T}$ unitär?

c) Schreiben Sie die $\boldsymbol{\tau}-$Transformation der *Weyl*spinoren $\psi_\alpha(x)$ und $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(x)$ auf.
Was ergibt sich im Fall eines *Majorana*spinors?

d) Zeigen Sie: $\boldsymbol{\tau}^2\,\Psi(x) = -\Psi(x)$. Dann ist mit Ψ auch $\boldsymbol{\tau}\,\Psi$ ein Eigenzustand zu $\mathbf{H}$, der nicht proportional zu Ψ ist (*Kramers*-Entartung).

22) Zur Vertauschung von Translationen mit Supersymmetrietransformationen

Schreiben Sie die Struktur des Kommutators $[\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}^B_\beta]$ auf, die mit den Indizes, der Graduierung und der Abwesenheit von Spin 3/2 Generatoren verträglich ist. Nennen Sie die auftretenden Matrixelemente c^{BD}.

a) Wie sieht der Kommutator $[\mathbf{P}_a, \bar{\mathbf{Q}}_{\dot{\beta}B}]$ aus?

b) Benützen Sie die $\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}^A_\alpha, \mathbf{P}_c$ *Jacobi*-Identität, um zu zeigen: $c^{BC}c^*{}_{CD} = 0$.

c) Schreiben Sie die $\mathbf{Q}^A_\alpha,\ \mathbf{Q}^B_\beta,\ \mathbf{P}_c$ *Jacobi*-Identität auf. Verwenden Sie dabei $[\mathbf{Z}^{AB}, \mathbf{P}_a] = \mathbf{0}$. Zeigen Sie, dass aus ihrem anti-symmetrischen Teil in α, β folgt: $c^{AB} = c^{BA}$.

d) Folgern Sie aus der gefundenen Matrixgleichung $\mathbf{c}\,\mathbf{c}^+ = \mathbf{0}$, dass bereits $c^{AB} = 0$ gelten muss.

23) Zentrale Ladungen

Um zu beweisen, dass die Generatoren $\mathbf{Z}^{AB}$ sowohl mit den Supersymmetriegeneratoren $\mathbf{Q}$ und $\bar{\mathbf{Q}}$ als auch mit sich selbst vertauschen,

a) zeigen Sie zuerst, dass die $\mathbf{Z}^{AB} = -\mathbf{Z}^{BA}$ eine invariante Unter-*Lie*algebra der inneren Symmetriealgebra $[\mathbf{T}_r, \mathbf{T}_s] = i\,c_{rs}{}^t\,\mathbf{T}_t$ bilden. (D.h. die Struktur ist $[\mathbf{T}, \mathbf{Z}] \propto \mathbf{Z}$, $[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}] \propto \mathbf{Z}$.)

b) Welche *Jacobi*-Identität drückt $[\mathbf{Z}^{AB}, \bar{\mathbf{Q}}_{\dot{\gamma}C}]$ durch $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ Kommutatoren (die nach Aufgabe **22)** verschwinden) aus?

c) Warum folgt $[\mathbf{Z}^{AB}, \mathbf{Z}^{CD}] = \mathbf{0}$ aus $[\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Q}}] = \mathbf{0}$? (Also bilden die $\mathbf{Z}$ eine invariante *abelsche* Unter-*Lie*algebra der $\mathbf{T}$ *Lie*algebra.) Außerdem folgt $[\mathbf{Z}, \mathbf{Q}] = \mathbf{0}$.

d) Da die innere Symmetriealgebra nach *Coleman-Mandula* vom Typ kompakte, halbeinfache Liealgebra $\oplus$ abelsche Summanden ist, liegen wegen Teil **c)** die $\mathbf{Z}$ Generatoren im abelschen Summanden, also gilt mit Teil **a)** $[\mathbf{T}_r, \mathbf{Z}^{AB}] = \mathbf{0}$.